چگونه از باران فرار کنیم؟

مترجم: علی فنونی

QUANTUM / JUNE ۱۹۹۸

فرض کنید شما در یک روز ابری در خیابانی در حال پیاده‌روی هستید. چتر بارانی و یا چیز دیگری که در مقابل باران از شما محافظت کند در اختیار ندارید. بر حسب تصادف با یک باران شدید همراه با بادی تند مواجه می‌شوید. چکار می‌کنید؟

اکثر مردم چنین پاسخ می‌دهند:« بهتر است هر چه زودتر به نزدیکترین پناهگاه برویم. هرچه تندتر برویم کمتر خیس خواهیم شد.» این جواب ظاهراً معقول به نظر می‌رسد.

البته بعضی از مردم خواهند گفت:« البته ما به نزدیکترین پناهگاه می‌رویم. ولی نیازی به تند دویدن نیست زیرا اگر ما تند برویم زمان کمتری را در زیر باران خواهیم بود و قطرات باران در راستای عمودی کمتر به ما برخورد خواهد کرد ولی در راستای افقی قطرات باران بیشتری به بدن ما می‌خورد. درست است که قسمت بالای بدن ما کمتر خیس می‌شود ولی جلوی بدنمان بیشتر خیس می‌گردد. بنابراین چه احتیاجی به دویدن است؟« این گونه از افراد، در زیر باران به آرامی حرکت می‌کنند.»

شما درباره این استدلال چگونه فکر می‌کنید؟ آیا فکر می‌کنید که اشتباه است؟ در اینجا نکته‌ای دیگری وجود دارد که این استدلال را حمایت می‌کند. فرض کنید باد به سمت پناهگاه می‌وزد و آنقدر شدید است که قطرات باران تقریباً به‌طور افقی ببارند. سپس بهترین راه‌حل این است که در جهت باد و با همان سرعت بدوید. تمام قطرات به موازات شما حرکت می‌کنند ولی هیچ کدام به شما برخورد نخواهند کرد.

دویدن با سرعتی کمتر، باعث بیشتر خیس شدن شما می‌شود همچنین با سرعت بیشتر نیز شما بیشتر خیس خواهید شد. البته دویدن با سرعت یک باد شدید آسان نیست. این گفته‌ها نشان می‌دهد که بهتر است مسأله را بیشتر بررسی کنیم.

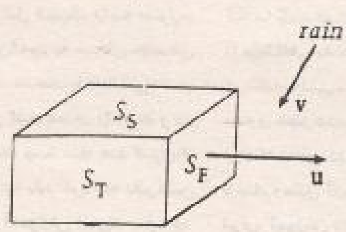
مرتب کردن مسأله

بگذارید شرایط مسأله را در نظر بگیریم:

شخصی در خیابان ایستاده ناگهان باران شروع به باریدن می‌کند. شخص می‌خواهد به نزدیکترین پناهگاه که به فاصله L از قرار دارد، برود. او چگونه حرکت کند تا در حد امکان خشک بماند؟

به نظر می‌رسد که مسأله در این حالت قابل حل نیست. در واقع بدن شخص شکل پیچیده‌ای داشته و وقتی او می‌دود، دست‌ها و پاهایش را تکان می‌دهد و این تغییرات ادامه می‌یابد. با این شرایط حل مسأله بسیار دشوار (غیر ممکن) است. بنابراین حالت ساده‌ای از مسأله را در نظر می‌گیریم:

یک مکعب مستطیل با وجه‌هایی به مساحت (وجه بغل): S_1، (وجه بالایی): S_2 و (وجه جلویی): S_3 با سرعت V عمود بر وجه جلویی در حال حرکت است. هر قطره باران با سرعت V می‌افتد.(شکل ۱)



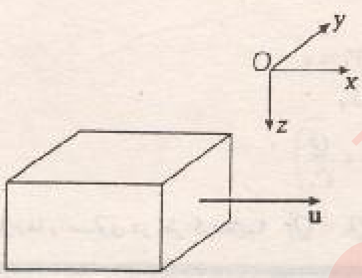
(شکل ۱)

(بردار V نباید حتماً عمودی باشد با توجه به این که باد نیز می‌وزد)

تعداد قطرات باران در واحدحجم K می‌باشد. چند قطره باران (این مقدار را N در نظر می‌گیریم) در مکعب مستطیل می‌افتند. وقتی مسافت L را طی می‌کند، با چه سرعتی (V) مقدار N به حداقل ممکن خواهد رسید؟

شروع به حل مسأله می‌کنیم:

مختصات O_{xyz} را چنین در نظر می‌گیریم: محور O_z عمود به سمت پایین، محور O_x در جهت سرعت v و محور O_y عمود بر صفحه O_{xz} به طوری که مؤلفه‌های سرعت قطرات باران V مثبت شود. (به شکل ۲ توجه کنید)



(شکل ۲)

از آنجا که بردار V معلوم است می‌توان فرض کرد که مؤلفه‌های آن نیز داده شده است، که آنها را V_x, V_y و V_z در نظر می‌گیریم. همان طور که می‌دانیم درباره این مؤلفه‌ها داریم:

$V_y \geq 0$ (با انتخاب محور O_y)

$V_z > 0$ (باران به سمت پایین می‌افتد)

V_x نیز می‌تواند مثبت (وقتی که باران به پشت شما می‌خورد) یا منفی باشد (وقتی که باران به صورت شما برخورد می‌کند) یا حتی صفر باشد.

اگر سرعت برخورد قطرات باران با مکعب مستطیل W باشد خواهیم داشت W=V-u پس داریم:

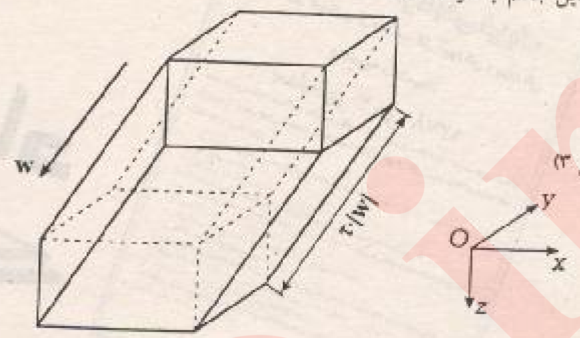
$$\begin{cases} W_x = V_x - u \\ W_y = V_y \\ W_z = V_z \end{cases}$$

(در این جا منظور از u طول بردار $\vec{u}$ است)

حال باید تعیین کنیم در مدت $t = \dfrac{L}{u}$ چه تعدادی قطره باران (N)، در جسم فوق

می‌افتد و به ازای چه مقدار u مقدار N کمینه خواهد شد؟

روشن است که یک قطره در مدت t درون مکعب مستطیل خواهد افتاد اگر و فقط اگر در فاصله‌ای کمتر یا مساوی $t|W|$ از وجوه مکعب مستطیل قرار داشته باشد. در واقع قطره باید در جسم نشان داده شده در شکل ۳ بیفتد. اما حجم این جسم چقدر است؟



(شکل ۳)

این جسم از سه منشور با قاعده‌های S_1 و S_2 و S_3 و ارتفاعی برابر مؤلفه‌های tW در محورهای o_x و o_y و o_z تشکیل شده است. بنابراین حجم جسم برابر است با:

$$t(|W_x|S_3+|W_y|S_1+|W_z|S_2)$$
$$=t(|V_x-u|S_3+|V_y|S_1+|V_z|S_2)$$

و مقدار N نیز برابر است با $t=k(|V_x-u|S_3+|V_y|S_1+|V_z|S_2)$ از آنجایی که $t=\frac{L}{u}$ داریم:

$$N=kL\frac{|V_x-u|S_3+|V_y|S_1+|V_z|S_2}{u}$$

اگر مقادیر k و L ثابت باشند متغیر جدید ψ راتعریف می‌کنیم:

$$\psi=\frac{N}{KL}=\frac{|V_x-u|s_3+|V_y|s_1+|V_z|s_2}{u}$$

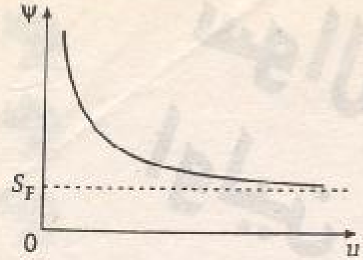
دو حالت در نظر می‌گیریم.

۱) $V_x\le 0$ (باران به صورت شما بخورد)

در این حالت داریم $V_x-u<0$ پس:

$$\psi=\frac{(u-V_x)s_3+V_ys_1+V_zs_2}{u}$$
$$=s_3+\frac{-V_xs_3+V_ys_1+V_zs_2}{u}$$

از آنجا که $V_x\le 0$ است، پس عبارت کسری در سمت راست مثبت بوده و $\psi(u)$ در فاصله $(0,+\infty)$ کم می‌شود. شکل شماره ۴ نمودار ψ بر حسب u را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود اگر چه وقتی u زیاد می‌شود ψ کاهش پیدا می‌کند ولی همیشه مقدار ψ از s_3 بیشتر است و وقتی u به s_3 نزدیک می‌شود ψ به سمت بی‌نهایت میل می‌کند. بنابراین به نظر می‌رسد که پاسخ دسته اول اشتباه است. که «هرچه تندتر بروید کمتر خیس می‌شوید».



(شکل ۴)

البته نکته دیگری نیز به چشم می‌خورد. از آنجایی که برای هر مقدار u داریم: $\psi>s_3$ و $N=kL\psi$ پس مقدار N همیشه از kLs_3 بیشتر خواهد بود. این گفته به این معنا خواهد بود که هر چقدر شما تند بدوید به مقدار (kLs_3) از باران برخورد خواهید کرد. پس منطقی در پاسخ کسانی که علاقه‌ای به عجله نداشتند وجود دارد.

۲) $V_x>0$ (باران به پشت شما برخورد کند)

دو بازه در نظر می‌گیریم.

الف) $0<u\le V_x$ پس $|V_x-u|=V_x-u$ بنابراین

$$\psi=\frac{V_xS_3+V_yS_1+V_zS_2}{u}-S_3$$

این تابع در فاصله $[0,V_x]$ نزولی است و در نقطه $u=V_x$ کمینه می‌شود.

$$\psi_{min}=\frac{V_yS_1+V_zS_2}{V_x}$$

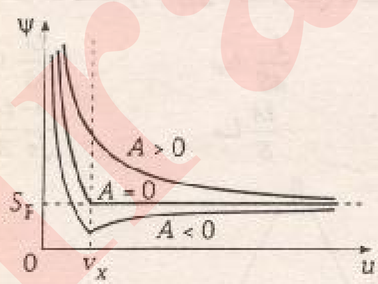
ب) $u>V_x$ پس $|V_x-u|=u-V_x$ بنابراین

$$\psi=\frac{-V_xS_3+V_yS_1+V_zS_2}{u}+S_3$$

در این حالت ما نمی‌توانیم فوراً بگوییم وقتی u افزایش پیدا می‌کند ψ چگونه تغییر خواهد کرد. این تغییر بستگی به عبارت کسری موجود در رابطه فوق دارد:

$$A=-V_xS_3+V_yS_1+V_zS_2$$

اگر $A>0$ سپس تابع $\psi(u)$ در فاصله‌ی $(V_x,+\infty)$ نزولی است. اگر $A<0$ تابع در همین فاصله صعودی است و اگر $A=0$ آن گاه مقدار تابع ثابت است: $\psi=S_3$. شکل ۵ سه حالت ممکن تابع $\psi'=\psi(u)$ در بازهٔ $u\in(0,+\infty)$ را نشان می‌دهد.



(شکل ۵)

مشاهده می‌شود که در بازه $(0,V_x)$ در سه حالت ($A>0$، $A=0$، $A<0$) شبیه بوده بعد از اینکه $u=V_x$ می‌شود، متفاوت می‌شوند. نتیجه می‌گیریم گاهی که باد مساعد است برهان گروه اول درست به نظر می‌رسد.