(۱)

بنام خدا — ریاضی کاربردی استاد میرقصری — ۹۲,۱۱,۳۰ — پنجشنبه

(الف) مثال: مشتق توابع زیر را بدست آورید

$y = 2x^2 + 5x - 4 \qquad 2 \times 2x + 5 \times 1 \Rightarrow 4x + 5$

$y = 5x^4 + 6x^3 + 5x + 3 \qquad 5 \times 4x^3 + 6 \times 3x^2 + 5 \times 1 + 0 \Rightarrow 20x^3 + 18x^2 + 5$

$y = 2x^8 + 5x^4 + 3x^2 - 4x - 3 \qquad 2 \times 8x^7 + 5 \times 4x^3 + 3 \times 2x - 4 \times 1 - 0 = 16x^7 + 20x^3 + 6x - 4$

مثال

$y' = (f(x) \times g(x))' = y' \; (f')(g) + (f)(g')$

(ب)

$y = (4x+1)(x^2+3x-4) \qquad (4x+1)'(x^2+3x-4) + (4x+1)(x^2+3x-4)'$

$(4)(x^2+3x-4) + (4x+1)(2x+3)$

مثال

$y' \; (5x^2+1)(x^5+3x-4) \qquad (5 \times 2x)(x^5+3x-4) + (5x^2+1)(5x^4+3)$

$y = (x^3+2x-7)(3x^4-7x+4) \qquad (3x^2+2)(3x^4-7x+4) + (x^3+2x-7)(3 \times 4x^3 - 7)$

مثال

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$y = \frac{4x^2+1}{x^3-2x+4} = y' = \frac{8x(x^3-2x+4) - (4x^2+1)(3x^2-2)}{(x^3-2x+4)^2}$

$y = \frac{5x^3-4x+1}{2x^4-7x+6} : \frac{(5 \times 3x^2 - 4)(2x^4-7x+6) - (5x^3-4x+1)(2 \times 4x^3 - 7)}{(2x^4-7x+6)^2}$

مثال

$\sqrt[n]{u^m} = u^{\frac{m}{n}} \qquad \sqrt{4x+1} = (4x+1)^{1/2}$

$y = \sqrt[3]{(4x+1)^2} \; . \; (4x+1)^{\frac{2}{3}} \; . \; \left(\frac{2}{3}\right)(4x+1)^{-\frac{1}{3}}(4)$

$$y = \sqrt[5]{(7x^2+3x-6)^8} = (7x^2+3x-6)^{8/5}$$

$$\frac{8}{5}(7x^2+3x-6)^{\frac{8}{5}-1}\cdot(14x+3)$$

$y' \xrightarrow{\text{تبدیل}} y$

انتگرال: ضد مشتق.

با داشتن مشتق تابع می‌خواهیم خود تابع را بدست آوریم

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + C$$

$$y = C \longrightarrow y' = \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\int 0\,dx = C$$

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int 1\,dx = x + C$$

$$\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C \qquad \int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$$

$$\int x^5\,dx = \frac{x^6}{6} + C \qquad \int x^{10}\,dx = \frac{x^{11}}{11} + C$$

تعریف: اگر مشتق تابع $F(x)$ برابر $f(x)$ باشد آنگاه انتگرال آن که تابع اولیه گویند به صورت $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ است.

۹۴,۱۲,۷ ریاضی کاربردی استاد حمید قدری پنجشنبه

* اگر مشتق تابع $F(x)$ برابر $f(x)$ باشد آنگاه تابع اولیه $f(x)$ برابر $F(x)$ است به

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

انتگرال عدد ثابت معادل صفر است ← C $\int 0\,dx = C$ ⟸ $(C)' = 0$

$\frac{dx^{n+1}}{dx} = (n+1)x^n$ مشتق صورت و مخرج

انتگرال تعمیم در

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$\frac{d}{dx}(x^4) = 4x^3$ $\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$

$\int x^5\,dx = \frac{x^6}{6} + C$ یعنی یک واحد به توان x اضافه شده و عدد توان زیر کسر قرار می‌گیرد

مشتق	انتگرال
$(C)' = \frac{dC}{dx} = 0$	$\int 0\,dx = C$
$(x^{n+1})' = \frac{dx^{n+1}}{dx} = (n+1)x^n$	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$	$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$
$(3x^4 + 5x + 7)' = 12x + 5 + 0$	$\int (x^4 + x^3 + 7)\,dx = \int x^4\,dx + \int x^3\,dx + \int 7\,dx = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + 7x + C$
$(5x^4)' = 5 \times 4x^3 = 20x^3$	$\int c\,f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$ $\int 5x^3\,dx = 5\int x^3\,dx = 5\frac{x^4}{4} + C$

$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$(4x^2+1)(x+4) = y' = 8x(x+4) + 8x(x+4) + (4x^2+1)$

انتگرال

$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$

انتگرال

$\int uv'dx = \int u dv = uv - \int v dx$

$\int x e^x dx = x e^x - \int 1 \times e^x dx = x e^x - e^x + C$

$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$

$g'(x) = e^x dx \Rightarrow g(x) = \int e^x dx = e^x$

قانون انتگرال: $\int e^x dx = e^x$

$(e^x)' = e^x$

$(e^{ax})' \Rightarrow a e^{ax}$

$(e^{3x})' \Rightarrow 3e^{3x}$

$(a^x)' \Rightarrow a^x \ln a$

$\ln a = \log_e a$ لگاریتم طبیعی

$(a^x)' \Leftrightarrow a^x \ln a$

$(8^x)' \Leftrightarrow 8^x \ln 8$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $1(x') \rightarrow 1 \Leftarrow x$ مشتق

$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$\int \frac{u'dx}{u} = \ln u + C$

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

$\ln(4x+1)' = y' = \frac{(4x+1)'}{4x+1} = \frac{4}{4x+1}$

$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

$\int \ln x \, dx = ?$

مشتق | انتگرال

۱) $(\sin x)' = \cos x$ | $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

۲) $(\cos x)' = -\sin x$ | $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

۳) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$ | $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$

۴) $(\cot)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$ | $\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$

۱) $\int \cos u \, (u' dx) = \sin u + C$

۲) $\int \sin u \, (u' dx) = -\cos u + C$

۳) $\int \sec^2 u \, (u' dx) = \tan u + C$

۴) $\int \csc^2 u \, (u' dx) = -\cot u + C$

$\int \cos(4x+3)\frac{4}{4}\,dx = ? = \frac{1}{4}\int \cos u\,du$

$u = 4x+3 \qquad = \frac{1}{4}\sin(4x+3) + C$

$u' = 4$

$\int \sin(5x^2+7)\,x\,d =$

قاعده: $\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$

$\int \cos(4x+3)\,dx = \frac{1}{4}\sin(4x+3) + C$

قانون: $\int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$

$\int \sin(7x+3)\,dx = -\frac{1}{7}\cos(7x+3) + C$

$\int \ln x\,dx =$

$\int x \ln x\,dx =$

$\int \sin(6x^2+7)\,x\,dx = ?$

$\int \cos(7x+5)\,dx = ?$

$\int x \cos x\,dx = ?$

۷

پنجشنبه ریاضی کاربردی ۹۲٫۱۲٫۱۴

تعیین اساسی انتگرال نامعین

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C$$

انتگرال معین

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

$$\int_0^4 (4x^3+7x-5x)\,dx = \frac{4}{3}(4)^3+\frac{7}{2}(4)^2-5\times(4)+C-(0+0\cdots+C)$$

$$\int_0^1 4x^2dx+\int_0^4 7x\,dx-\int_0^4 5\,dx$$

$$\int Cx^n\,dx = C\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$$

$$\int_{-2}^{3}(2x^3+3x-4)\,dx = ?$$

$$\downarrow$$

$$\left.\frac{2x^4}{4}+\frac{3x^2}{2}-4x+C\right]_{-2}^{3}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{2(3)^4}{4}+\frac{3(3)^2}{2}-4\times(3)+C-\frac{2(-2)}{4}+\frac{3(-2)^2}{2}-4(-2)+C$$

$$=42-22=20$$

$$\int_0^{\pi/4}(\sin x+\cos x)\,dx = ?$$

$$\downarrow$$

$$\left.-\cos x+\sin x\right|_0^{\pi/4} = \left(-\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\right)-\left(-\cos 0+\sin 0\right)$$

$$=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(-1+0\right)=1$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int \ln x\,dx = (x\ln x + x) + C$$

$$x\ln x - \int x \times \frac{1}{x}\,dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$$

$f(x) = \ln x \quad f'(x) = 1/x$

$g(x) = dx \quad g(x) = x$

$$\int x\ln x\,dx \quad \tfrac{1}{2}x^2\ln x - \int \tfrac{1}{2}x^2 \times \tfrac{1}{x}\,dx$$

$f(x) = \ln x$ $\qquad = \tfrac{1}{2}x^2\ln x - \tfrac{1}{2}\int x\,dx$

$g'(x) = x\,dx$

$$= \tfrac{1}{2}x^2\ln x - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}x^2\right) + C$$

$f'(x)\,dx = \frac{1}{x}\,dx$

$g(x) = \int x\,dx = \tfrac{1}{2}x^2$

$$\int x\cos x\,dx \qquad \int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx$$

$f(x) = x \longrightarrow f'(x) = 1$

$g'(x) = \cos x \rightarrow g(x) = \int \cos x\,dx = \sin x$

$$x\sin x - \int \sin x \times 1\,dx = x\sin x - (-\cos x) + C$$

$f(x) = x \qquad -1 < x \leq 1 \qquad P = ۲$

$$\int_{-a}^{a} x\cos(n\pi x)\,dx = 0$$

هر تابع زوجی که منفی و مثبت باشد پاسخ صفر است

$\int x^2 \sin x \, dx$

$f(x) = x^2 \to f'(x) \; 2x$

$g'(x) = \sin x \to g(x) \int \sin x \, dx = -\cos x$

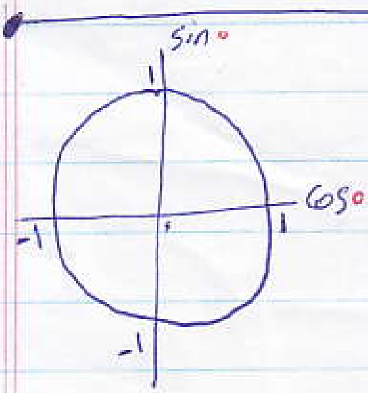
$-x^2 \cos x - \int (-\cos x)\, 2x \, dx = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x \, dx$

$= -x^2 (\cos x + 2(x \sin x - \int \sin x$

$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$a<b$



$\cos(n\pi) = \begin{cases} 1 & n \text{ زوج} \\ -1 & n \text{ فرد} \end{cases} = (-1)^n$

اگر دوره تناوب تابع ۲π باشد یعنی L برابر π آنگاه $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right)$$

$L = \pi$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{\pi}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{\pi}x\right)\right)$$

۲۰/۱/ ۹۴ استاد ریاضی کاربردی میرقدری پنجشنبه جلسه پنجم

فقط توابع مثلثاتی دارای تناوب و تکرار می‌باشند.

(۱۱)

سری فوریه دوگانه تابع دو متغیر $f(x,y)$

$f(x+\pi,y) = F(x,y+\pi) = f(x,y)$

کتاب صفحه ۲۵

$f(x,y)$

اگر $f(-x,y) = -f(x,y)$ و $f(x,-y) = -f(x,y)$

حالت خاص

$$f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} d_{mn} \sin mx \sin ny$$

$f(x,y) = xy \quad -\pi < x < \pi, \quad -\pi < y < \pi$ سری فوریه دوگانه تابع xy را بدست آورید

$f(-x,y) = -xy = -f(x,y)$

$f(x,-y) = -xy = -f(x,y)$

$$d_{mn} = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xy \sin mx\, ny \, dx\, dy$$

$$d_{mn} = \frac{1}{\pi^2}\left(\int_{-\pi}^{\pi} x \sin mx \, dx\right)\left(\int_{-\pi}^{\pi} y \sin ny \, dy\right.$$

$$\int x \sin mx \, dx = \frac{-x}{m}\cos mx + \frac{1}{m^2}\sin nx + C$$ قانون

$$\frac{1}{\pi^2}\left(-\frac{x}{m}\cos mx + \frac{1}{m}\int \cos mx \, dx\right)$$

$$\frac{1}{\pi^2}\left(-\frac{x}{m}\cos mx\right.$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$ در حالت زوج

تعریف: اگر $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| = m < \infty$ آنگاه انتگرال فوریه وجود دارد و عبارت است از

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} [a(w)\cos wx + b(w)\sin wx]\, dw$$

$$a(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos wx\, dx$$

$$b(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin wx\, dx$$

انتگرال فوریه $f(x) = \begin{cases} x & -\pi < x < \pi \\ 0 & |x| > \pi \end{cases}$ را بیابید.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx = \int_{-\infty}^{-\pi} 0\, dx + \int_{-\pi}^{\pi} x\, dx + \int_{\pi}^{\infty} 0\, dx$$

$|x| > \pi \equiv x < -\pi$ یا $x > \pi$

$|x| < \pi \equiv -\pi < x < \pi$

دنباله ۲، ۹۶،۲،۲ ـ ادامه سری دوره تناوب $p = 2L$ $\quad -L < x < L \quad y = f(x)$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

اگر مقدار a حقیقی و مقدار b موهومی باشد لذا $c = a + ib$ را عدد مختلط گوییم

مانند $c = -2 + 3i \qquad c = -5 - 4i \qquad c = 2 + 7i$

پس $x = \pm\sqrt{-4}$ می‌شود $x = \pm 2i$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}$$

حالت مختلط سری فوریه

با داشتن روابط $e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

و جایگذاری در سری فوریه داریم

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi}{L}x}$$

سری مختلط فوریه

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) e^{\frac{-jn\pi x}{L}} dx \quad n = 0, \pm 1, \pm 2$$

$$a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = j(c_n - c_{-n})$$

مثال: سری مختلط فوریه تابع $y=e^{x}$ $\quad -\pi<x<\pi$ را بدست آورید و سری حقیقی

ضرایب را بنویسیم:

حل: گام اول محاسبه C_n

$$C_n=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{\frac{-jn\pi x}{L}}\,dx$$

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x}e^{\frac{-jn\pi x}{\pi}}\,dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x-inx}\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-jn)x}\,dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{1-in}e^{(1-in)x}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)= \qquad \int e^{ax}dx=\frac{1}{a}e^{ax}+C \text{ ثابت}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{1-jn}\right)\left[e^{(1-in)\pi}-e^{-(1-in)\pi}\right]? \qquad \int_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$$

جا بذار

$$C_n=\frac{\sinh\pi}{\pi}\,\frac{1+jn}{1+n^2}(-1)^n$$

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{\frac{in\pi}{L}x}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\sinh\pi}{\pi}\,\frac{1+in}{1+n^2}(-1)^n e^{jnx}$$

گام دوم

$$=\frac{\sinh\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1+jn}{1+n^2}(-1)^n e^{jnx}$$

$$\frac{1}{a+jb}=\frac{a-jb}{a^2+b^2}$$

کار برای عدد مختلط

$$a^{-n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n=\frac{1}{a^n}$$

حل: برای یافتن سری حقیقی فوریه از C_n مقادیر a_n و b_n را می‌یابیم

$$a_n = C_n + C_{-n} = \frac{\sinh\pi}{\pi}\,\frac{1+jn}{1+n^2}(-1)^n + \frac{\sinh\pi}{\pi}\,\frac{1+j(-n)}{1+(-n)^2}(-1)^{-n}$$

$$= \frac{\sinh\pi}{\pi}\left[\frac{1+in}{1+n^2}(-1)^n + \frac{1-jn}{1+n^2}\left(\frac{1}{-1}\right)^n\right]$$

$$= \frac{\sinh\pi}{\pi}\,\frac{(-1)^n}{1+n^2}\left[1+in+1-in\right] = \frac{2\sinh\pi}{\pi}\,\frac{(-1)^n}{1+n^2}$$

$$b_n = j(C_n - C_{-n}) = \frac{-2n\sinh\pi}{\pi}\times\frac{(-1)^n}{1+n^2}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$ فرمول برای سری حقیقی

$$e^x = \frac{\sinh\pi}{\pi} + \frac{2\sinh\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}(\cos nx - n\sin nx)$$

$$y = e^{nx} \qquad -\pi < x < \pi$$

انتگرال فوریه

$$f(x) = \int_0^{\infty} a(w)\cos wx + b(w)\sin wx \, dw$$

$$a(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos wx\, dx$$

$$b(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin wx\, dx$$

انتگرال مختلط فوریه

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(w)\, e^{jwx}\, dx$$

$$c(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-jwx}$$

انتگرال مختلط فوریه تابع

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < \pi \\ 0 & |x| > \pi \end{cases}$$

$$c(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-jwx} dx$$

تا بدون انتگرال صفر برابر با صفر است

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-\pi} 0 \cdot e^{-jwx} dx + \int_{-\pi}^{\pi} 1 e^{-jwx} dx + \int_{\pi}^{\infty} 0 \cdot e^{-jwx} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jwx} dx = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{-jw} e^{-jwx} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right)$$

$$= \frac{1}{-2\pi i w} \left(e^{-jw\pi} - e^{-jw(-\pi)} \right) = \frac{1}{\pi w} \left(\frac{e^{jw\pi} - e^{-jw\pi}}{2j} \right)$$

$$\frac{\sin \pi w}{\pi w}$$

نکته:

$$\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \sin\theta$$

$$\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos\theta$$

۹۴/۲/۱۰ پنجشنبه

فوریه کسینوسی

$$\tilde{f}_c(w) = F_c\{f\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos wx \, dx$$

$$f(x) \longrightarrow F(w)$$

فوریه سینوسی

$$F_s(f) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin wx \, dx = \tilde{f}_s(w)$$

۱۷

حل $f(x)=\begin{cases} 1 & 0<x<a \\ 0 & x>a \end{cases}$ $\quad F_c , F_s = ?$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a 1 \times \cos wx \, dx + \int_a^\infty 0 \cos wx \, dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \cos wx \, dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{1}{w} \sin wx \right]_0^a \qquad \text{فرمول} \int_a^b f(x)\,dx = F(x) \Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{1}{w} \sin wa - \frac{1}{w} \sin 0 \right)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w} \sin wa \qquad \text{فرمول} \int \sin wx \, dx = -\frac{1}{w} \cos wx$$

$$\tilde{F}_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \sin wx \, dx :$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \int_0^a 1 \times \sin wx \, dx + \int_a^\infty 0 \times \sin wx \, dx \right\}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \sin wx \, dx = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{w} \cos wx \Big]_0^a$$

چون منفی پشت است علامت ها تغییر کرد

$$\text{تبدیل} = -\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{w} (\cos aw - 1) \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w} (1 - \cos wa)$$

۱- سینوسی معکوس (?)

$$F_c^{-1}(\tilde{f}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \tilde{f}_c(w) \cos wx = f(x)$$ تبدیل معکوس کسینوسی

۱- (?) معکوس

$$F_s^{-1}(\tilde{f}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_s^{\infty} \tilde{f}_s(w) \sin wx \, dw$$

نکته: تبدیلات فوریه دارای خاصیت خطی هستند.

$$F(af(x) + bg(x)) = aF(f(x)) + bF(g(x))$$

$$F^{-1}(a\tilde{f}(w) + b\tilde{g}(w)) = aF^{-1}(\tilde{f}(w)) + bF^{-1}(\tilde{g}(x))$$

مثال: $y = 2\sin 2x - 4x + 5 \Rightarrow F(2\sin 2x - 4x + 5) = 2F(\sin 2x) - 4F(x) + 5F(1)$

تبدیل فوریه تابع $-\infty < x < \infty$ و $y = F(x)$ برابر است

$$F(f) = \tilde{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-jwx} \, dx$$

$$F^{-1}(\tilde{f}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(w) e^{iwx} \, dw$$

اینجا w یعنی فرکانس

تتا $\theta \rightarrow$

فرمول $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$

(۱۹)

مثال: $f(x) = e^{-2x^2}$ — مثال تبدیل فوریه را بیابید

$$F(e^{-2x^2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x^2} e^{-jwx}\, dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\, du = \sqrt{\pi}$$ فرمول

$$-2x^2 - jwx = -2\left(x^2 + \frac{jwx}{2}\right) = -2\left(x^2 + 2\left(\frac{jw}{4}\right)x + \left(\frac{jw}{4}\right)^2 - \left(\frac{jw}{4}\right)^2\right)$$

$(x \pm a)^2 = x^2 \pm 2ax + a^2$ — اتحاد فرمول مربع

$$-2\left(x + \frac{jw}{4}\right)^2 + 2\left(\frac{jw}{4}\right)^2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\left(x + \frac{jw}{4}\right)^2 + 2\left(\frac{jw}{4}\right)^2}\, dx$$

$$2\left(x + \frac{jw}{4}\right)^2 = u^2$$

$$\sqrt{2}\left(x + \frac{jw}{4}\right) = u$$

$$\sqrt{2}\, dx = du$$

$$dx = \frac{du}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{2\left(\frac{jw}{4}\right)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} \frac{du}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{2\left(\frac{jw}{4}\right)^2} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2} e^{\frac{j^2 w^2}{8}} = \frac{1}{2} e^{\frac{-w^2}{8}}$$

تبدیل فوریه

۱- تبدیل کسینوسی

$$f(x) \longrightarrow F_c(f) = \tilde{f}(w)$$

$$F_c(f) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos wx \, dx$$

۲- تبدیل سینوسی

$$F_s(f) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \sin wx \, dx$$

۳- تبدیل فوریه

$$~~F(f) = \tilde{f}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \, e^{-jwx} \, dx~~$$

$$~~F^{-1}(\tilde{f}) = \ldots~~$$

خواص فوریه

۱- خطی بودن

$$F(af(x) + bg(x) + ch(x)) =$$

$$aF(f) + bF(g) + cF(h)$$

۲- تبدیل مشتق

$$F(f'(x)) = jw F(f(x))$$

$$F(f''(x)) = -w^2 F(f(x))$$

$$F(f'''(x)) = -jw^3 F(f(x))$$

مثال تبدیل فوریه تابع $f(x) = 2x e^{-x^2}$

$$f_1(x) = e^{-x^2} \quad \text{مشتق میدهد} \quad f_1' = -2x e^{-x^2} = -f(x) \rightarrow$$

$f_1' = -2x e^{-x^2}$ همان

$$F(2x e^{-x^2}) = F(-f_1'(x)) = -jwF(e^{-x^2}) = -jw \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{w^2}{4}}$$

$$= \frac{-jw}{\sqrt{2}} e^{-\frac{w^2}{4}}$$

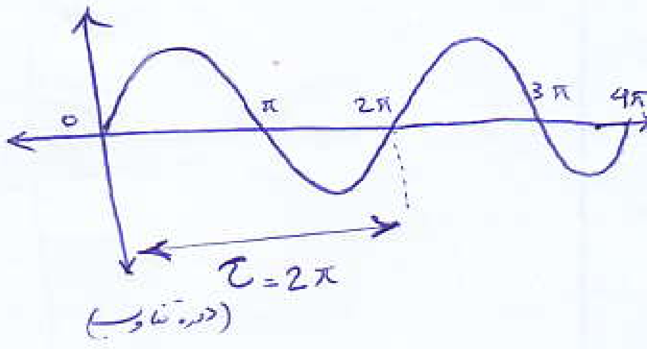
$$F(2x e^{-x^2}) = -jwF(e^{-x^2}) \quad \text{لذا} \quad (e^{-x^2})' = -2x e^{-x^2} \quad \text{چون}$$

$$= -jw \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{w^2}{4}}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \cdots$$

سری فوریه
$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

ضرایب فوریه
$$\begin{cases} a_n = \frac{2}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f(x) \cos nx \, dx \\ b_n = \frac{2}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f(x) \sin nx \, dx \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} 1 & \frac{\pi}{2} < x < \pi \\ -1 & -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

جواب) $\tau = 2\pi$

$$a_n = \frac{2}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 1 \cos nx \, dx + \frac{2}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\pi} -1 \cos nx \, dx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos 0x \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\pi} -\cos 0x \, dx = \frac{1}{\pi} \left[(x)_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + (-x)_{-\frac{\pi}{2}}^{-\pi} \right]$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left[(\pi - \frac{\pi}{2}) - (-\pi + \frac{\pi}{2}) \right] = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) \right] = \frac{1}{\pi} [\pi] = 1 \Rightarrow \boxed{a_0 = 1}$$

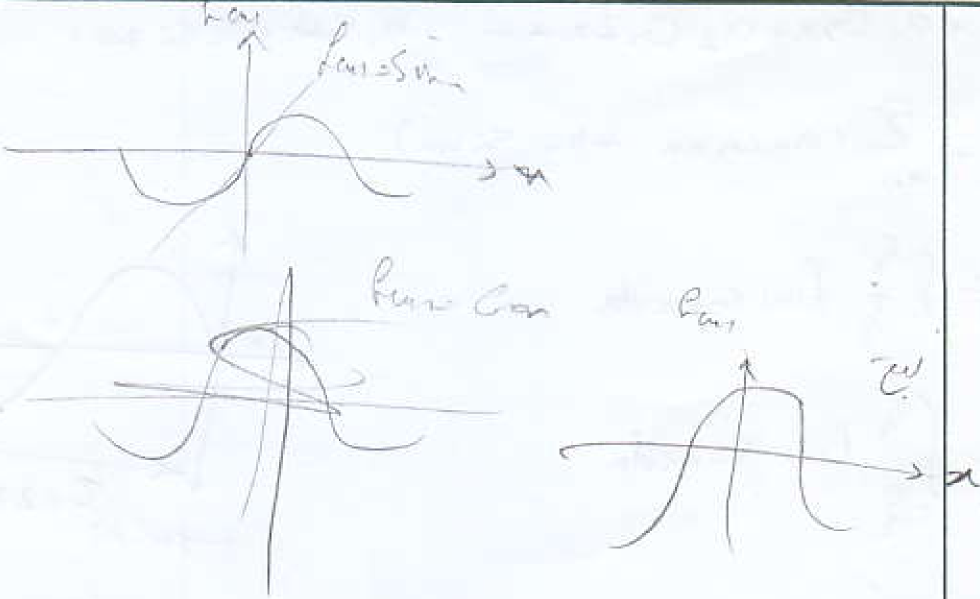
$$a_1 = \frac{1}{\pi} \left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 1 \times \cos x \, dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\pi} 1 \times \cos x \, dx \right] = \frac{1}{\pi} \left[\sin x \Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \sin x \Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{-\pi} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[(\sin \pi - \sin \frac{\pi}{2}) - (\sin(-\pi) - \sin(-\frac{\pi}{2})) \right] = \frac{1}{\pi} (-1 - 1) = -\frac{2}{\pi} \Rightarrow \boxed{a_1 = \frac{2}{\pi}}$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 1 \sin x \, dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\pi} \sin x \, dx \right] = \frac{1}{\pi} \left[-\cos x \Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \cos x \Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{-\pi} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-\cos \pi + \cos \frac{\pi}{2} - (\cos(-\pi) + \cos(-\frac{\pi}{2})) \right] = 0 \Rightarrow \boxed{b_1 = 0}$$

نکته: ضرایب سینوس تابع فرد صفر است.


f(x)=Sin x
f(x)= Cos x

پیچش دو تابع

اگر f و g دو تابع باشند پیچش f و g را با نماد $f*g$ نشان داده می‌شود

$$f*g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, g(x-u)\, du$$

هر دو یکی است

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)\, g(u)\, du$$

مثال $f(x) = x$

$g(x) = e^{-x}$

$$f*g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u\, e^{-(x-u)}\, du = \int u\, e^{-x} e^{u}\, du \Rightarrow$$

$$= e^{-x} \int_{-\infty}^{\infty} u\, e^{u}\, du$$

تبدیل فوریه $f*g$ برابر است با

$$F(f*g) = \sqrt{2\pi}\, F(f)\, F(g)$$

مثال

$$F(x * e^{-x}) = \sqrt{2\pi}\, F(x)\, F(e^{-x}) \Rightarrow$$

$$F(e^{-x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(1+iw)}$$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int x\, e^{-iwx}\, dx$$

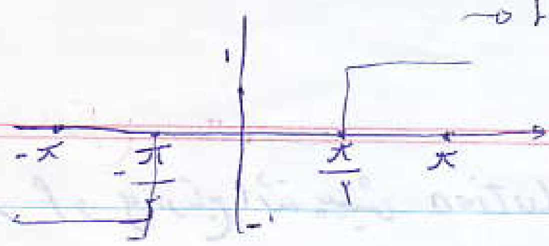
$$= \sqrt{2\pi}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, w^2} \times e^{-jw} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(1+iw)}$$

$$F(x * e^{-x}) = \frac{\sqrt{2\pi}\, e^{-jw}}{\sqrt{2\pi}\, w^2} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(1+jw)} = \frac{e^{-jw}}{\sqrt{2\pi}\, w^2\,(1+jw)}$$

۱- سری فوریه توابع زیر را بیابید

الف)

$$f(x)=\begin{cases}1 & \pi/2<x<\pi\\ 0 & -\pi/2<x<\pi/2\\ -1 & x<\end{cases}$$



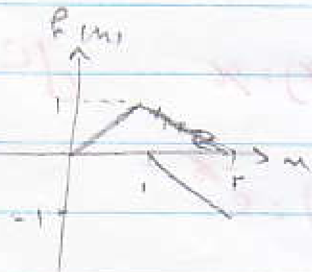
ب)

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}+x & -\pi<x<0\\ \frac{\pi}{2}-x & 0<x<\pi\end{cases}$$

ج) $f(x)=x+\sin x \quad -\pi<x<\pi$

د)

$$f(x)=\begin{cases}x & 0<x<1\\ 1-x & 1<x<2\end{cases}$$



ه) $f(x)=e^{x} \quad -\pi<x<\pi$

و) $f(x)=\sin \pi x \quad 0<x<1$

۲- تبدیل فوریه توابع زیر را بیابید

الف) $f(x)=e^{2ix} \quad -1<x<1$

ب) $f(x)=e^{2x} \quad x<0$

ج)

$$f(x)\begin{cases}1 & 0\leq x\leq \pi\\ 0 & x>\pi\end{cases}$$

د)

$$f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$$

ه)

$$f(x)=\begin{cases}|x| & -2<x<2\\ 0 & \text{غیر از آن}\end{cases}$$

۳- نشان دهید که $\int_0^\infty \frac{\cos wx + w\sin wx}{1+w^2}\, dw$ برابر است

$$f(x) = \begin{cases} \pi e^{-x} & x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos wx}{1+w^2}\, dw + \int_0^\infty \frac{w \sin wx}{1+w^2}\, dw$$

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

$U = f(x, y, z, \ldots)$

$y = f(x) \quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \longrightarrow (x^n)' = n x^{n-1}$

معادله دیفرانسیل برحسب تابع و مشتقات آن است

$2y' + 3y = 7x$

$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x = 1 \times y = y \qquad u(x,y) = xy$

$y' = g(x)$

$\frac{\partial u}{\partial y} = u_y = x \times 1 = x \qquad u(x,y) = x + y$

$y'' + 7y + 5x = 1$

$u(x,y) = x^7 y^2 + 5xy + \sin(x+y)$

$3y''' + 7y'' + 5y' + y = 8x$

هر عددی که x در آن نبود مساوی صفر است

$u(x,y) = 7xy^2 + 5x + 6y + 7$ (x ثابت)

$u_x = 7y^2 + 5$

$u_y = 14xy + 6$

$u(x,y,z) = ۷xy^۲ + ۴x^۲z^۲ + ۵yz + ۷x + ۸y + z - ۵$

$u_x = ۷y^۲ + ۸xz^۲ + ۷$

$u_{xx} = \frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} \quad (u_x)_x = ۸z^۲$

$u_y = ۱۴xy + ۵z + ۸$

$u_{yy} = \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} \quad (u_y)_y = ۱۴x$

$u_z = ۸x^۲z + ۵y + ۱$

$u_{zz} = \frac{\partial^۲}{} \quad (u_z)_z = ۸x^۲$

$u_{xx} = \frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} =$

$u_{xy} \quad (u_x)_y = ۱۴y$

$u_{yx} \quad (u_y)_x = ۱۴y$

u_{xz}

$u(x,y,z) = ۵x^۲yz^۳ + ۴y^۲z + ۵xyz + ۷$

$u_x = ۱۰x + ۵yz$

$u_y = ۵x^۲z^۳ + ۸yz + ۵xz$

$u_z = ۱۵x^۲yz^۲ + ۴y^۲ + ۵xy$

$u_{xx} = ۱۰yz^۳$

$u_{xy} = ۱۰xz^۳ + ۵z$

$u_{yy} = ۸z$

$u_{zz} = ۳۰x^۲yz$

$u_x + u_y = 4$

$u_{xx} + 2u_{yy} = 0$

عملگر لاپلاس
$$\begin{cases} \nabla^2 u = u_{xx} \\ \nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} \\ \nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} \end{cases}$$

---

(۱) $Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = f(x,y,u,u_x,u_y)$ معادلات مرتبه دوم مشتقات جزئی

A, B, C توابعی از x و y هستند

فرم کلی شبه خطی معادلات دیفرانسیل جزئی

(۲) $u_{tt} = c^2 \nabla^2 u$ معادله موج — $\nabla^2 u = u_{xx}$ عملگر لاپلاسی یک بعدی

(۳) $u_t = c^2 \nabla^2 u$ معادله گرما — $\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy}$ دو بعدی

(۴) $\nabla^2 u = 0$ معادله لاپلاس — $\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ سه بعدی

(۵) $\nabla^2 u = f(x,y,z)$ معادله پواسن

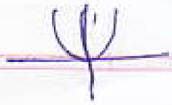
(۶) $\nabla^2 u + ku = 0$ معادله هلم هولتز

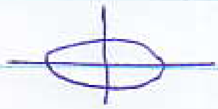
در معادله (۱) اگر $4AC - B^2 > 0$ معادله بیضوی گویند

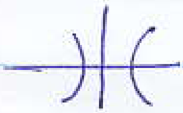
اگر $4AC - B^2 = 0$ معادله سهموی گویند

اگر $4AC - B^2 < 0$ هذلولوی گویند

$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = f(x,y,u,u_x,u_y)$ فرم معادلات مشتقات جزئی خطی مرتبه دوم

$y = x^{۲}$ 

$\frac{x^{۲}}{۴} + \frac{y^{۲}}{۹} = ۱$ 

$\frac{x^{۲}}{۴} - \frac{y^{۲}}{۹} = ۱$ 

$y' + ۲x = ۴$

$y' = ۴ - ۲x$

$y = \int (۴ - ۲x)\, dx$

تابع اولیه $= ۴x - x^{۲} + C$

$y' = g(x) \longrightarrow y \int g(x)\, dx$, تابع اولیه

$y' - xy = ۰$

$y' = xy$

$\frac{y'}{y} = x$

$\int \frac{y'}{y} = \int x\, dx$

$\ln |y| = x^{۲} + C_{۱}$

$y = Ce^{x^{۲}}$

۲۷

$u_x = 0 \qquad u(x,y)$

$\int u_x = \int 0 \Rightarrow u(x,y) = g(y)$

$u_y = 0 \rightarrow u(x,y) = f(x)$

$u_{xx} = 0 \longrightarrow u_x = \int u_{xx} = g(y)$

$u(x,y) = \int g(y)\,dx$

$= x\,g(y) + f(y)$

$u_{yy} = 0 \qquad u(x,y) = x^4 y + 5y^3$

$u_y = \int 0\,dy = f(x) \qquad u_y = x^4$

$u(x,y) = \int f(x)\,dy = y\,f(x) + g(x) \qquad u_{yy} = 0$

تمرین: جواب معادلات مشتقات جزئی زیر را بدست آورید

$u_x = 0 \qquad u_y = 0 \qquad u_{xx} = 0 \qquad u_{xy} = 0 \qquad u_{yy} = 0$

۲. مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم توابع زیر را بدست آورید

$u(x,y) = x^5 y^3 + 7xy + 4y + 1$

$u(x,y,z) = xy^5 + yz^3 + xz + 7$

معادله ارتعاش $u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t) \qquad 0 < x < L \;,\; t > 0$

جواب این معادله جواب خاص است

$u(x,0) = f(x) \qquad 0 \leqslant x \leqslant L$

$u_t(x,0) = g(x) \qquad 0 \leqslant x \leqslant L$

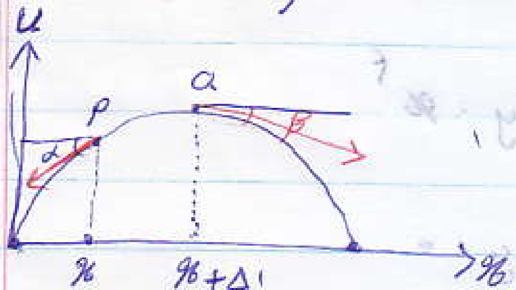
$u(0,t) = p(t) \qquad t \geqslant 0$

$u(L,t) = q(t) \qquad t \geqslant 0$

مانند قانون دوم نیوتن جرم × شتاب

جواب که به معادله دیفرانسیل ارجالت دارد
جمله عدد ثابت مشتق شخصی نیست

۱) جواب عمومی: $y' = 2x$ مشتق $\quad y = \int 2x\,dx = x^2 + c \Rightarrow y = x^2 + c$ جواب



۲) جواب خاص: $f(x)$

$$\frac{dG}{dT} = \dot{G} \;,\; \frac{d^2G}{dt^2} = \ddot{G}$$

$$\frac{df}{dx} = F' \;,\; \frac{d^2F}{dx^2} = F''$$

$T_2 \sin\beta - T_1 \sin\alpha \rightarrow$ طبق قانون دوم نیوتن

$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \qquad u(x,t) = ?$

روش ضربی

$u(x,t) = f(x)\,G(t)$

① مشتق براساس t: $u_t = f(x) \cdot G'(t)$

② مشتق برای x: $u_x = f'(x) \cdot G(T)$

③ مشتق دوم T: $u_{tt} = f(x) \cdot G''(T)$

④ مشتق دوم x: $u_{xx} = f''(x) \cdot G(t)$

⑤ پس جاگذاری در رابطه طبق صورت مسئله: $f(x) \cdot G''(t) - c^2 f''(x) \cdot G(t)$

④ : $F(x)\,G''(t) = c^2 F''(x)\,G(t)$ در این حالت سمت چپ را جدا

$$\frac{G''(t)}{c^2 G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = k$$ میشود عبارت بالا به صورت زیر نوشت — مساوی با k

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = k \qquad \frac{G''(t)}{c^2 G(t)} = k$$

$$F''(x) - kF(x) = 0 \qquad G''(t) - kc^2 G(t) = 0$$

$$k = \mu^2 > 0 ,\quad F(x) \neq 0 \quad G(t) \neq 0$$

جواب

$$F(x) = a\cosh \mu x + b\sinh \mu x$$

$$G(t) = A\cosh t + B\sinh t$$

جواب

مهم

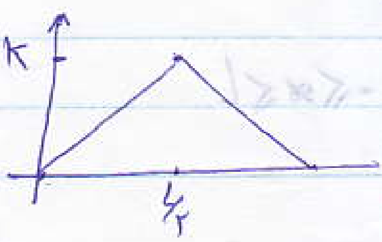
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \lambda_n t + b_n \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx$$

$$b_n = \frac{2}{L\lambda_n}\int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx$$

مثال: فرض کنید یک نخ به طول L را مطابق شکل از وسط تا ارتفاع k بالا برده و رها شده است



انحراف این نخ را در هر لحظه مشخص کنید

$$f(x) = u(x,0) \begin{cases} \frac{2k}{L}x & 0 < x < \frac{L}{2} \\ \frac{2k}{L}(L-x) & \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

$g(x) = u_t(x,0) = 0 \Rightarrow b_n = 0$ — $g(x)$ مساوی صفر است

$$a_n = \frac{2}{L}\left\{\int_0^{L/2} \frac{2k}{L} x \sin\frac{n\pi}{L} x\,dx + \int_{L/2}^{L} \frac{2k}{L}(L-x)\sin\frac{n\pi}{L} x\,dx\right\}$$

$$\int x \sin ax\,dx = -\frac{x}{a}\cos ax + \frac{1}{a^2}\sin ax + C$$ فرمول انتگرال جزء به جزء

$$\int x \cos ax\,dx = \frac{x}{a}\sin ax + \frac{1}{a^2}\cos ax + C$$

$$\frac{2}{L}\left\{\frac{2k}{L}\left(-\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{L}x + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{L}x\right]_0^{L/2} + \left(\frac{2k}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{L}x + \right.\right.$$

$$\left.\frac{2k}{L}\left(\frac{L}{n\pi}x - \frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{L}x\right)\right]_{L/2}^{L} = \frac{8k}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$u(x,t) = \frac{8k}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\lambda_n t \sin\frac{n\pi}{L}x$$

حال برای مسئله (۱) جواب بنویسیم

$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$

$v(0,t) = 0$ باید

$v(L,t) = 0$

$w(0,t) = p(t)$

$w(L,t) = q(t)$ جستجو می‌کنیم

$v_{tt} - c^2 v_{xx} = F_1(x,t)$ ، $0 < x < L, t > 0$

$v(x,0) = F_1(x)$

$v_t(x,0) = g_1(x)$ $0 \le x \le L$

$v(0,t) = 0$ $t \ge 0$

$v(L,t) = 0$

(۳۱)

$$V(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\lambda_n t+b_n\sin\lambda_n t+G_n^{*}(t)\right)\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$a_n=-G_n^{*}(0)+\frac{2}{L}\int_0^L g_1(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx]$$

که $G_n^{*}(t)$ جواب خصوصی معادله

$$\ddot{G}_n(t)+\lambda_n G_n(t)=\frac{2}{L}\int_0^L F_1(x)\cos\lambda\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

تمرین جواب معادله

$u_{tt}-u_{xx}=t \qquad 0<x<1,\ t>0$

$u(x,0)=x \qquad 0\leq x\leq 1$

$u_t(x,0)=2 \qquad 0\leq x\leq 1$

$u(0,t)=2t \qquad t\geq 0$

$u(1,t)=t$

را بدست آورید