بسم الله الرحمن الرحیم

پاسخ سوالات مرحله ی دوم المپیاد نجوم سال ۸۷-۸۶

سیدصدرا صدرالدینی - سیدامیرسادات موسوی

توضیح ضروری:

این جواب ها ،جواب های قطعیِ سوالات نیست.

۱- فرض می کنم که سرعت داده شده از نظر ناظر زمینی، تصحیح مربوط به حرکت انتقالی زمین را گرفته باشد، در غیر این صورت به علت نبودن تاریخ رصد احتمالاً کمی بیشتر از سه روز، امکان این تصحیح وجود ندارد.

تناوب مداری	P : Orbital period
جرمِ ستاره ی مرئی	m_1 : visible star's mass
جرمِ ستاره ی غیرِ مرئی	m_2 : invisible star's mass
میلِ مداری	i : inclination
شعاعِ مداریِ ستاره ی مرئی	r_1 : visible star's orbital radius
شعاعِ مداریِ ستاره ی غیرِ مرئی	r_2 : invisible star's orbital radius
سرعتِ مداریِ ستاره ی مرئی	v : visible star's orbital velocity
تکانه ی زاویه ایِ مجموعه	L : system's angular momentum
فاصله ی دو ستاره از همدیگر	$d = r_1 + r_2$
سرعتِ زاویه ایِ مجموعه	ω : system's angular velocity

الف)

$$v = \frac{300 km.s^{-1}}{\sin i}, \frac{m_1 v^2}{r_1} = \frac{G m_1 m_2}{(r_1 + r_2)^2} \Rightarrow m_2 = \frac{1}{G} r_1 v \left(1 + \frac{r_2}{r_1}\right)^2$$

$$Pv = 2\pi r_1 \Rightarrow m_2 = \frac{p}{2\pi G} v^3 \left(1 + \frac{r_2}{r_1}\right)^2$$

$$\Rightarrow m_2 = \frac{p}{2\pi G} \frac{(300 km.s^{-1})^3}{(\sin i)^3} \left(1 + \frac{r_2}{r_1}\right)^2 \Rightarrow m_{2\min} : i \to 90°, \frac{r_2}{r_1} \to 0$$

$$\Rightarrow m_{2\min} = \frac{p}{2\pi G}(300km.s^{-1})^3 = 1.67\times10^{31}kg = 8.39M_{sun}$$

که با توجه به دیده نشدن، و پر جرم تر بودن از حد جرمی کوتوله سفید $1.4M_{sun}$ و ستاره نوترونی $3.0M_{sun}$ به طور یقین این یک سیاهچاله است.

ب) اینکه ستاره از رده طیفی خورشید است، در همین حد راهنمایی است که ستاره را تماماً خورشیدگون بگیریم (ذاتاً چاره ای دیگری برای حل این مساله نداریم)

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{m_1}{m_2} \Rightarrow m_2 = \frac{p}{2\pi G}(300km.s^{-1})^3\left(1+\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = \frac{p}{2\pi G}(300km.s^{-1})^3\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)^2$$

$$\cong \frac{p}{2\pi G}(300km.s^{-1})^3\left(1+2\frac{m_1}{m_2}\right), \frac{m_2^2}{(m_2+2m_1)} = \frac{p}{2\pi G}(300km.s^{-1})^3 = 8.39M_{sun}, m_1 = M_{sun}$$

$$\Rightarrow m_2^2 - 8.39m_2 - 16.78 = 0 \Rightarrow m_2 = \frac{8.39 \pm \sqrt{8.39^2 + 4\times16.78}}{2}$$

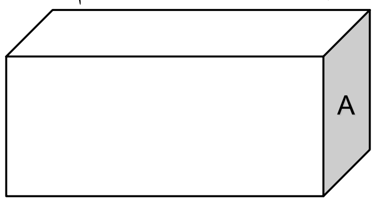
$$= 10.06M_{sun} \quad or \quad -1.67M_{sun}$$

که $10.06M_{sun}$ جوابِ قابلِ قبول است.

پ) اول باید تغییرات جرم را در ستاره پیدا کنیم. فضای نمونه ای در سطح ستاره فرض می کنیم:

$$nxA = \Delta N \Rightarrow n.m.uA\Delta t = \Delta M \Rightarrow \frac{\Delta M}{\Delta t} = n.m.uA$$

$$\frac{\Delta M}{\Delta t} = 4\pi R^2 n.m.u = -2.13\times10^9 kg.s^{-1} = -1.07\times10^{-17} M_{sun}.s^{-1}$$



$x = u\Delta t$

که در فضای نمونه یک حجم کوچک اختیار کرده ام، سپس چگالی جرمی خارج شده را از این جعبه بدست می آورم. در روابط u سرعت ذرات نسبت به دستگاه ستاره، n چگالی عدد ذرات و m جرم ذرات است. در آخر R شعاع ستاره است که برای بدست آوردن مساحت از آن استفاده نموده ام. در آخر توجه دارم این از دست دادن جرم است و علامت منفی را نیز قرار می دهیم. (یا می توانیم بگوییم سرعت منفی است زیرا اجرام خارج می شوند)

حال با استفاده از پایستگی تکانه زاویه ای و با فرض دایروی ماندن مدارها روند تغییرات پارامتر های مداری را محاسبه می کنیم. و البته اینکه $\frac{\Delta m_1}{\Delta t} = -\frac{\Delta m_2}{\Delta t}$ و $P^2 = \frac{d^3}{(m_1+m_2)} \Rightarrow d = 1.36\times10^{10}m$

$$L = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}d^2\omega, \omega = \sqrt{\frac{G(m_1+m_2)}{d^3}}, L = \sqrt{\frac{G}{m_1+m_2}}m_1 m_2\sqrt{d}$$

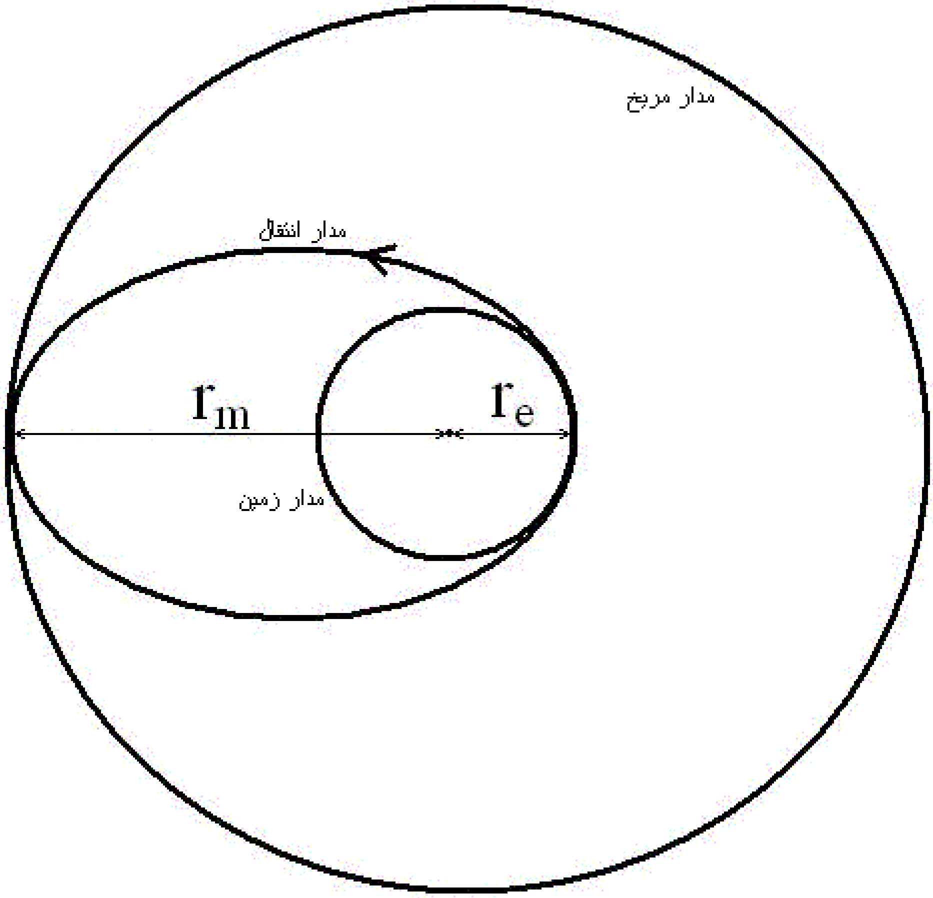
$$\frac{\Delta m}{\Delta t}\times10^9 yrs = 0.34M_{sun} \Rightarrow m'_2 = 10.40M_{sun} \ , m'_1 = 0.66M_{sun}$$

$$L = L' \Rightarrow m_1 m_2\sqrt{d} = m'_1 m'_2\sqrt{d'} \Rightarrow d' = d\left(\frac{m_1 m_2}{m'_1 m'_2}\right)^2 = 2.14d$$

$$\Rightarrow d'-d = 1.14d = 1.56\times10^{10}\,m$$

$$\frac{d^3}{P^2}=\frac{d'^3}{P'^2}\Rightarrow P'=P\left(\frac{d'}{d}\right)^{3/2}=9.39days\Rightarrow P'-P=6.39days$$

۲- شکلِ انتقال به صورتِ زیر است:



سفینه ابتدا در مدارِ زمین قرار دارد و با سرعتِ مداری زمین (V_e) در حالِ چرخش به دورِ خورشید است. زمانی که شرایط فراهم باشد، باید سرعتِ آن را به اندازه ای تغییر دهیم که سرعتِ حضیضِ مدارِ انتقال تامین شود و هنگامی که به مدارِ مریخ می رسد باید سرعتِ اوج را چنان تغییر دهیم که سرعتِ حرکتِ دایره ای فراهم آید.

ابتدا مشخصات مدار انتقال (a و e) را بدست می آوریم.(با دانستنِ اینکه حضیضِ مدارِ انتقال(r_1) به اندازه ی شعاعِ مداری زمین(r_e) و اوجِ مدارِ انتقال(r_2) به اندازه ی شعاعِ مداری مریخ(r_m) است:

$r_1=a(1-e)=r_e$
$r_2=a(1+e)=r_m$

با حلِ "دو معادله و دو مجهول " بالا a و e بدست می آیند: $1.89\times10^{11}m$ و 0.206

رابطه ی مقابل سرعتِ جسم در مدارِ بیضوی را در هر فاصله ی دلخواه (r) می دهد: $V^2=GM\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)$

که M در آن جرمِ خورشید است.با قرار دادنِ فاصله ی اوج و حضیض ،سرعتِ اوج و. حضیض بدست می آید (به ترتیب): 21.5 km/s و 32.7 km/s

سرعتِ مداری زمین(V_e) و مریخ(V_m) را هم از روابطِ زیر بدست می آوریم:

$$V_e = \sqrt{\frac{GM}{r_e}} = 2.975\times10^4 \, {}^{m}\!/\!{}_{s} = 29.75 \, {}^{km}\!/\!{}_{s}$$

$$V_m = \sqrt{\frac{GM}{r_m}} = 2.413\times10^4 \, {}^{m}\!/\!{}_{s} = 24.13 \, {}^{km}\!/\!{}_{s}$$

با توجه به مقادیرِ سرعت ها پس هر دو باری که نیاز است سرعتِ سفینه را تغییر دهیم باید سرعتش را افزایش دهیم.و بردارِ سرعتِ اولیه و ثانویه در یک جهتند در ضمن اولین تغییرِ سرعت در جهتِ گردشِ زمین ،مماس بر مدار زمین و دومین تغییرِ سرعت هم در جهتِ گردشِ مریخ و مماس بر مدارِ آن باید باشد.

ΔV_{21}=2.63 km/s ΔV_1=2.93 km/s

تناوب مدارِ انتقال:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3 \Rightarrow P = 4.481\times10^7 \, s$$

باید زمانِ ارسالِ سفینه را طوری تنظیم کنیم که وقتی سفینه به مدارِ مریخ می رسدمریخ دقیقا در همان نقطه باشد. حالا زمانی را در نظر بگیرید که سفینه به مدارِ مریخ رسیده است و مریخ هم در همان جا است.در این مدت زمان(P/2) زمین زاویه ای را طی کرده است.

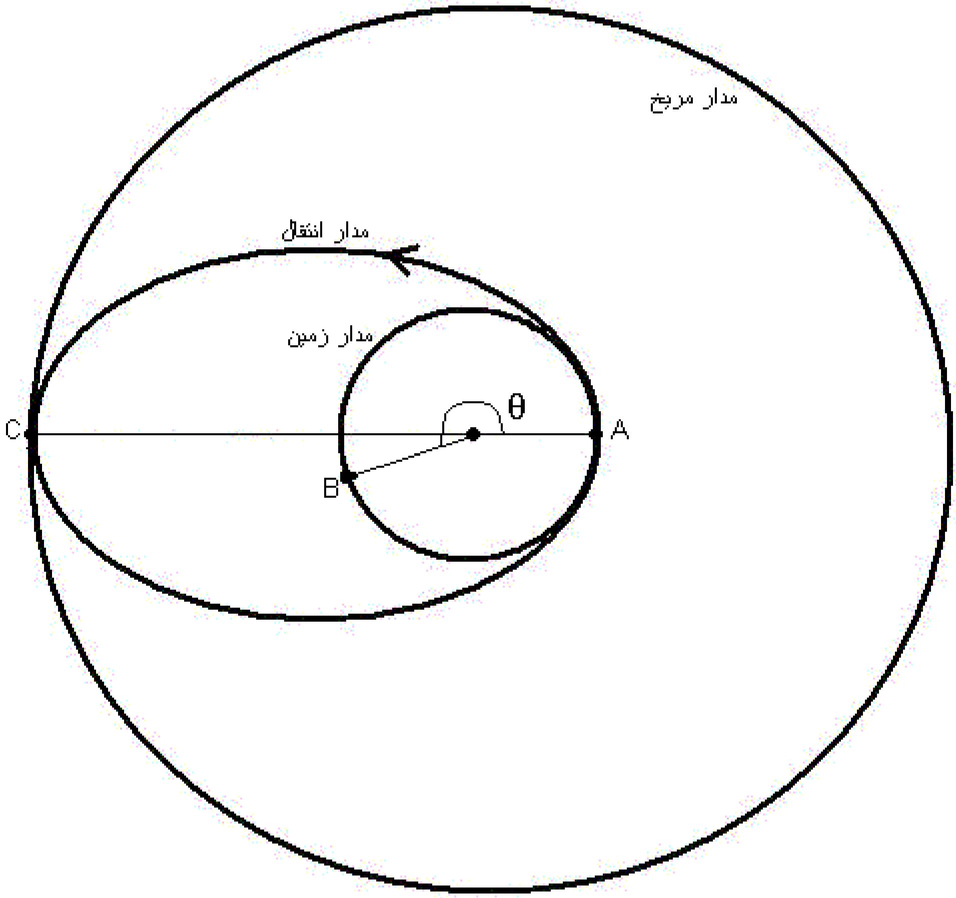
زاویه ای که زمین در مدتِ (P/2) طی می کند را θ در نظر می گیریم.

$\theta=\omega_e t=\omega_e(P/2)$

که ω_e سرعتِ زاویه ایِ زمین در مدارش است:

$$\omega_e = \sqrt{\frac{GM}{r_e^3}} = 1.98\times10^{-7} \, {}^{rad}\!/\!{}_{s}$$

=>θ=4.44 rad = 255°

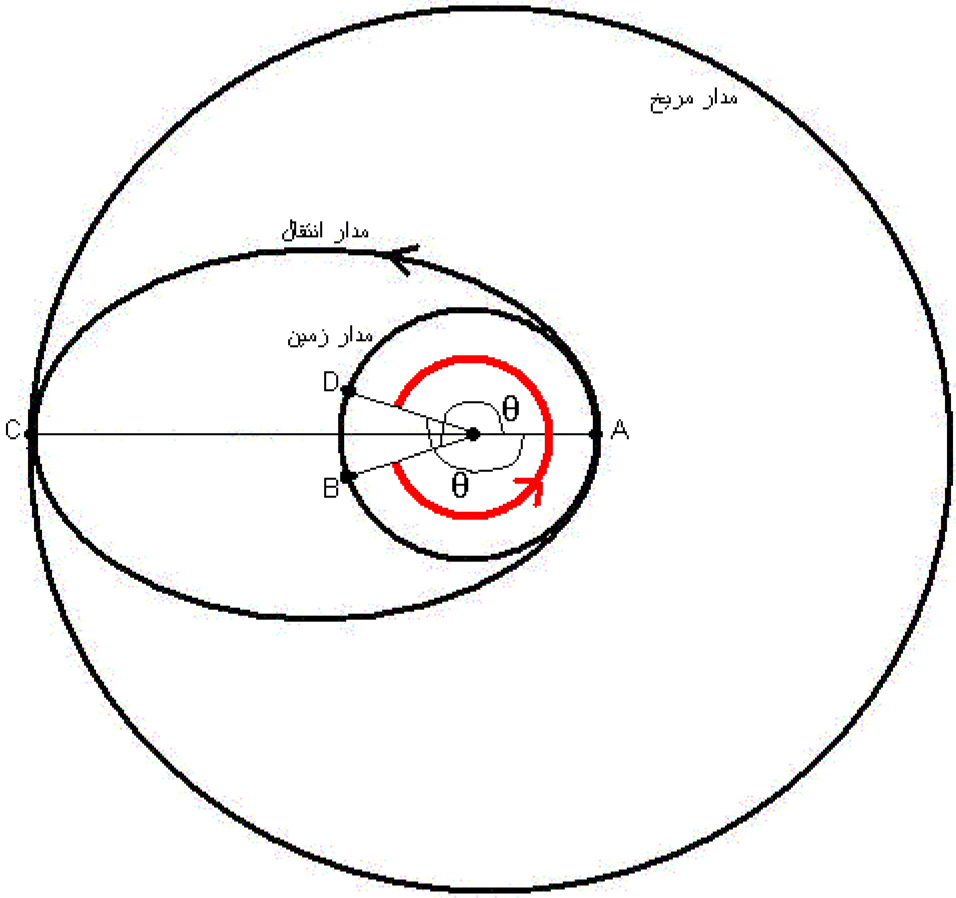


به شکلِ بالا نگاه کنید.در واقع زمانی که سفینه به نقطه ی C می رسد زمین از A به B رفته است.(دقت کنید که θ از ۱۸۰ درجه بزرگتر است)

اگر در همین لحظه سفینه بخواهد برگردد وقتی به مدارِ زمین می رسد زمین در آن نقطه از مدار، نیست.پس بهتر است سفینه مدتی را در مریخ منتظر بماند تا زمین به جایی برسد که پس از زمانِ (P/2) دقیقا در طرف مقابل باشد.

یعنی سفینه زمانی باید دوباره در مدارِ انتقالش قرار بگیرد که زمین به اندازه ی θ از نقطه ی A عقب تر باشد(بصورتِ نسبی). شاید در شکلِ زیر بهتر متوجهِ این موضوع شوید.در واقع سفینه باید مدت زمانی که زمین نسبت به شعاعِ مداریِ مریخ زاویه ی (180-θ)2- 360 را طی می کند در حالتِ انتظار باشد.

یعنی در شکل، زمین از نقطه ی B به D برود.(دقت کنید که این حرکت نسبی است)



پس لازم است ابتدا سرعتِ زاویه ایِ زمین نسبت به مریخ را حساب کنیم:

$$\omega'_e = \omega_e - \omega_m = 9.25\times10^{-8}\ rad/s$$

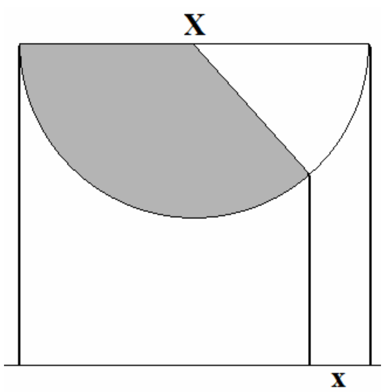
که ω'_e سرعتِ زاویه ایِ نسبی ، و ω_m سرعت زاویه ای مریخ است.

پس مدتِ انتظار برابر است با:

$$t = \frac{(2\pi - 2(\theta - \pi))}{\omega'_e} = \frac{(4\pi - 2\theta)}{\omega'_e} = 3.98\times10^{7}\ s$$

پس مدتِ رفت و برگشت(T) می شود دو تا نصفِ تناوب بعلاوه ی مدتِ انتقال:

$$T = t + P = 8.47\times10^{6}\ s = 2.68\ yrs$$



۳- در اینجا φ را زاویه قاچ روشن ماه تعریف می کنم، و جهت آن را نیز طبق شکل تعریف کرده ام.

$$x = \frac{X}{2}(1-\cos\varphi) \Rightarrow \varphi = \cos^{-1}(1-\frac{2x}{X})$$

و با دقت داریم که φ دو جواب دارد که از 180° بیشتر یا کمتر هستند.

تصویر سمت راست: کمی بعد از ماه بدر است بنابرین $\varphi > 180°$

$$x = 52mm, X = 62mm \Rightarrow \varphi = 227°.4$$

تصویر سمت راست: کمی قبل از ماه نو است بنابرین باز هم $\varphi > 180°$

$$x = 7mm, X = 59mm \Rightarrow \varphi = 319°.7$$

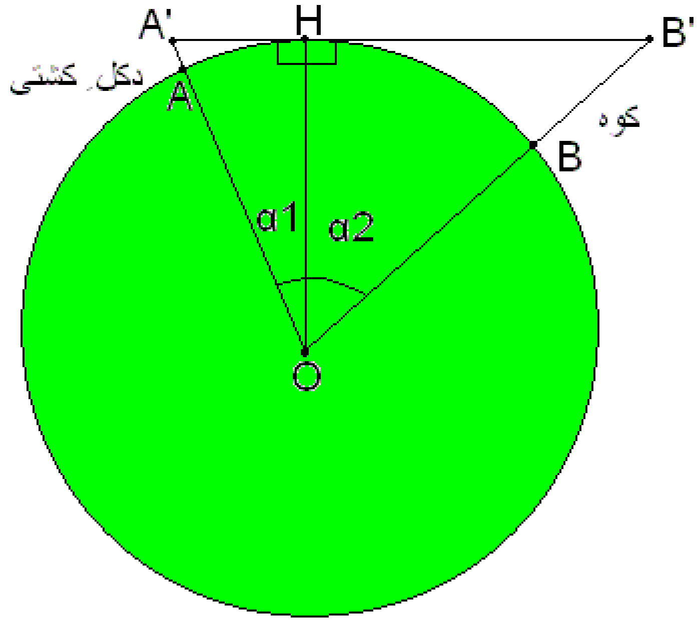
برای محاسبه دوره تناوب هلالی ماه ابتدا باید دوره تناوب نجومی آن را محاسبه کنیم:r فاصله ماه از زمین است.

$$S = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{GM_{earth}}{r^3}}} = 27.42 days, \frac{1}{T} = \frac{1}{S} - \frac{1}{1yr} \Rightarrow T = 29.65 days$$

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \Rightarrow \Delta T = 7.60 days$$

٤- ابتدا می خواهیم زاویه ی بین پایِ دکل و پایِ کوه را از دیدِ مرکزِ زمین(α) بدست آوریم. برای محاسبه، α را به α_1 و α_2 تقسیم می کنیم.

به شکلِ زیر نگاه کنید:



در شکلِ بالا A و B به ترتیب پایِ دکل و کوه است.و 'AA و 'BB به ترتیب ارتفاعِ دکل و کوه:

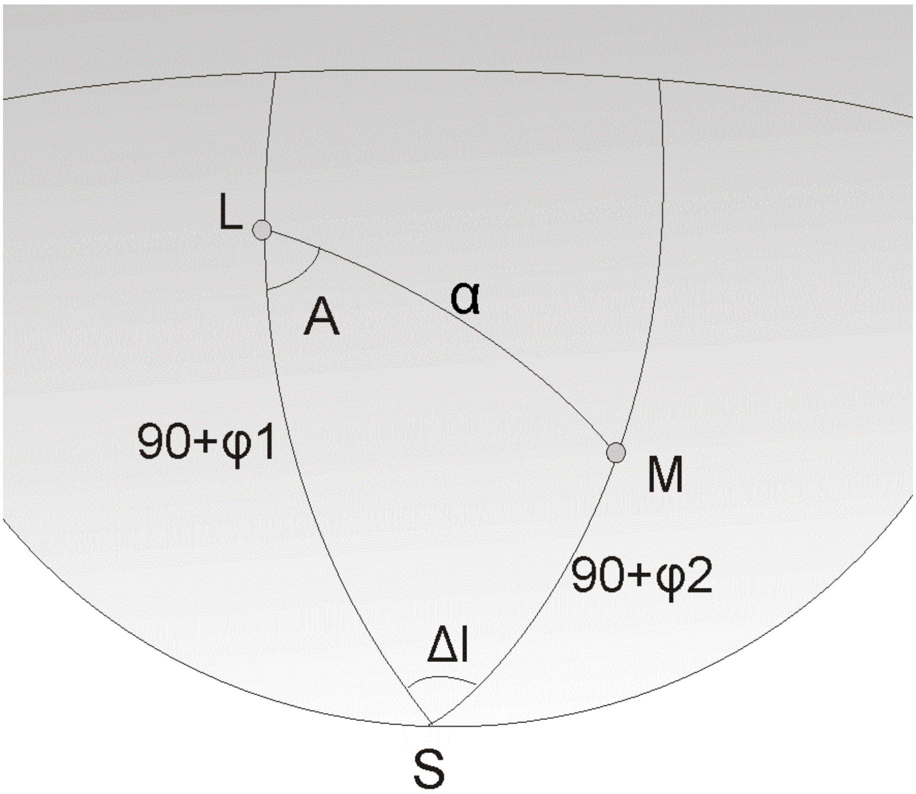
$$\cos\alpha_1 = \frac{OH}{0A'} = \frac{R_e}{R_e + h_1}, \cos\alpha_2 = \frac{OH}{0B'} = \frac{R_e}{R_e + h_2}$$

بنابر این α که مجموعِ α_1 و α_2 است بدست می آید: $2°.689 = 0.0469$ rad

طولِ کمانِ AB هم برابر است با: $AB = R_e\alpha = 299.5$ km

که در رابطه ی بالا α را باید بر حسبِ رادیان وارد کنیم.پس طولِ کمانِ AB برابر است با : 299.5 km

چیزی که اینجا باید به آن دقت کنید نحوه ی تعریفِ سمت در نیم کره ی جنوبی است که سمتِ شرقیِ یعنی از جنوب به سمتِ شرق!(به فصلِ ۲ نجوم کروی رجوع کنید)حالا به شکلِ زیر توجه کنید:



S قطبِ جنوب ، L مکانِ دکل ، M مکانِ کوه و φ1 و φ2 به ترتیب عرضِ جغرافیاییِ دکل و کوه و Δl هم اختلافِ طولِ جغرافیاییِ آنهاست.

A هم سمتِ شرقیِ کوه از دیدِ ملوانِ رویِ دکل می باشد.(α هم که حتما معرّفِ حضورتان هست)

در ضمن در نوشتنِ مقادیرِ عرضِ جغرافیایی اینطور قرار داد می کنیم که عرض های شمالی مثبت و عرض های جنوبی منفی اند!

در این مثلث α ، A و (90+φ2) را داریم.با یک فرمولِ کسینوس (90+φ1) و با یک فرمولِ سینوس Δl را بدست می آوریم:

$$\cos(90+\varphi2)=\sin(90+\varphi1)\sin\alpha+\cos(90+\varphi1)\cos\alpha\cos A$$
$$\Rightarrow -\sin\varphi2=\cos\varphi1\sin\alpha-\sin\varphi1\cos\alpha\cos A$$

برایِ حلِ این معادله باید $\sin\varphi1$ را $\sqrt{1-\cos^2\varphi1}$ جای گذاری کنیم.با به توان ۲ رساندن یک معادله ی درجه ۲ خواهیم داشت که با حل آن برای $\cos\varphi1$ دو جواب بدست می آید هر کدام از مقادیرِ $\cos\varphi1$ هم دو جواب برای φ1 می دهد.پس کلا می شود ٤ تا. با توجه به ظاهرِ مسئله φ1 باید مقداری بین صفر درجه و °90- باشد. که با این قید جوابِ درست مشخص می شود.پس φ1 برابر است با: °20.55- یعنی °20.55 جنوبی.

(روش دیگر: می توانیم از M بر LS عمود کنیم که φ1 به دو قسمت تقسیم می شود.اینطور دیگر نیازی به، به توان ۲ رساندن نیست)

برای محاسبه ی Δl:

$$\frac{\sin \Delta l}{\sin \alpha} = \frac{\sin A}{\sin(90+\varphi 2)}$$

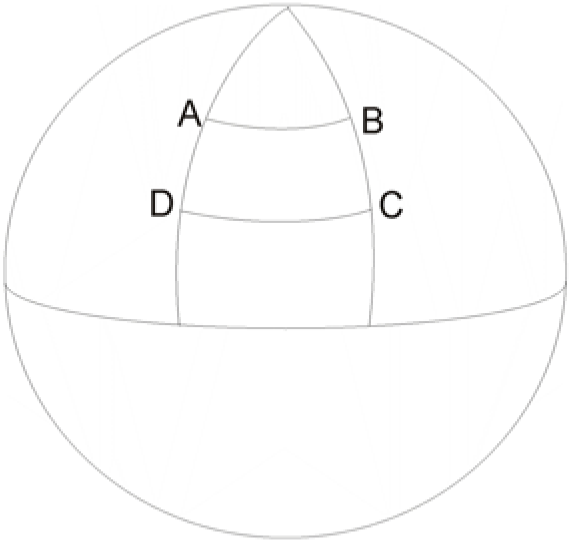
که $\sin \Delta l$ می شود: 0.0438 .پس برای Δl دو جواب بدست می آید: $2^\circ.5$ و $177^\circ.5$.با توجه به مقدارِ کمِ α قطعا Δl ، $2^\circ.5$ است.

$\Delta l = l_2 - l_1$

که l_2 و l_1 به ترتیب طولِ جغرافیایی کوه و دکل است.پس:

$l_1 = 65^\circ.89$ E

۵- مکانِ ستاره ها بر کره ی آسمان به شکلِ زیر است:



به طوری که A و B دارای میلِ برابر هستند.(C و D هم به همین شکل):

$$\delta_{(A,B)} = 28 := 2x, \delta_{(C,D)} = 14 := x$$

$$\Rightarrow \delta_{(A,B)} = 2\delta_{(C,D)}, \angle AB = \angle CD = 21$$

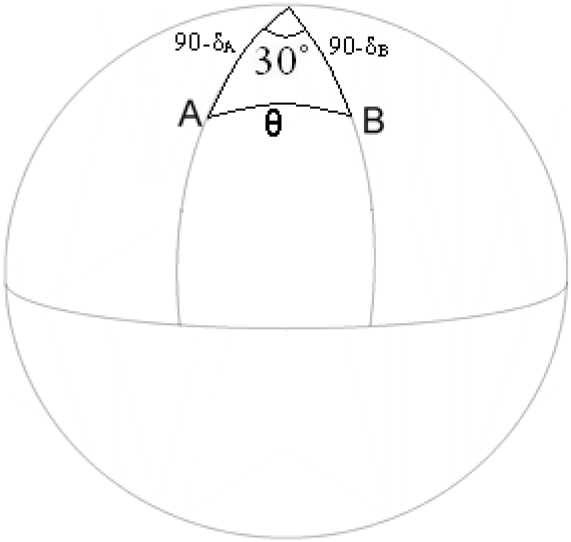
$$\overline{AB} = \angle AB \cos(\delta_{(A,B)}), \overline{CD} = \angle CD \cos(\delta_{(C,D)}) \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\cos 2x}{\cos x} = 0.8152$$

$$\frac{2\cos^2 x - 1}{\cos x} = 0.8152 \Rightarrow 2\cos^2 x - 0.8152 \cos x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = \cos^{-1}\left(\frac{0.8152 \pm \sqrt{0.8152^2 - 4\times 2\times(-1)}}{2\times 2}\right) \Rightarrow x = 20^\circ.0 \;\; or \;\; 340^\circ.0 \;\; or \;\; \pm 122^\circ.1$$

که جوابِ قابلِ قبول 20° است.

حالا به شکلِ زیر نگاه کنید.می خواهیم θ را بدست آوریم.(جدایی زاویه ای A و B)



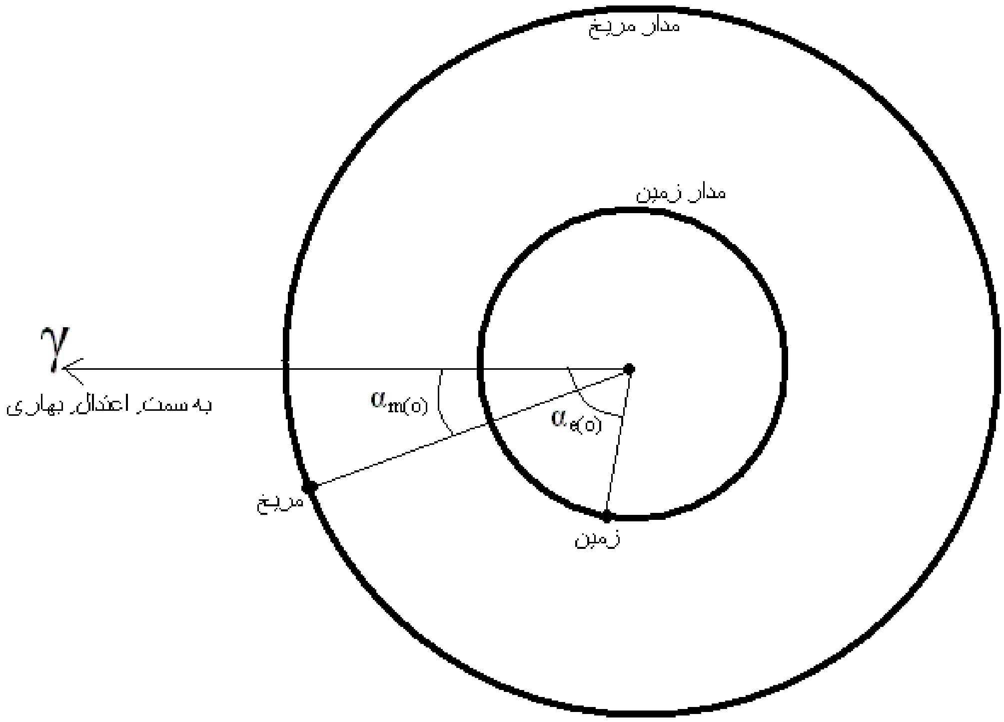
$$\cos\theta = \cos(90-\delta_A)\cos(90-\delta_B) + \sin(90-\delta_A)\sin(90-\delta_B)\cos 30$$

$$\delta_A = \delta_B = 2x = 40° \quad \Rightarrow \cos\theta = \sin^2\delta_A + \cos^2\delta_A \cos 30 = \sin^2 40 + \cos^2 40 \cos 30$$
$$\Rightarrow \theta = 22°.9$$

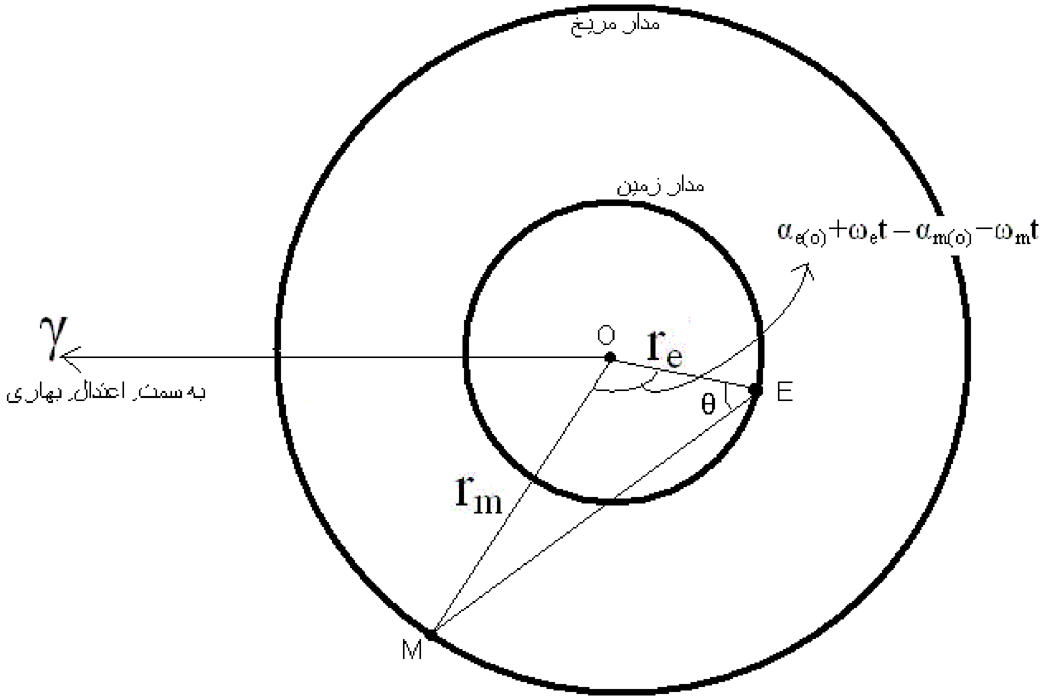
٦- ما نقطه ی اعتدال ِ بهاری را نقطه ی معیار ِ مان در دایرۀالبروج در نظر می گیریم(شما می توانید هر نقطه ی دلخواهی را برگزینید).در ضمن فرض می کنیم در حالت اول از دید ِ خورشید، زمین و مریخ به ترتیب(از راست به چپ) بعدهای اولیه ی زیر را دارند:

$\alpha_{m(o)}$ و $\alpha_{e(o)}$

به شکل ِ زیر نگاه کنید:



پس از مدت t مکانِ زمین و مریخ تغییر می کندو بعدِ زمین و مریخ از دیدِ خورشید به اندازه ی ωt تغییر می کند.به شکلِ زیر نگاه کنید در این حالت E زمین،M مریخ و O مکانِ خورشید است.زاویه ی OEM را با θ نشان می دهیم برای پیدا کردنِ زاویه ی مریخ با نقطه ی اعتدالِ بهاری نیاز به این زاویه داریم.



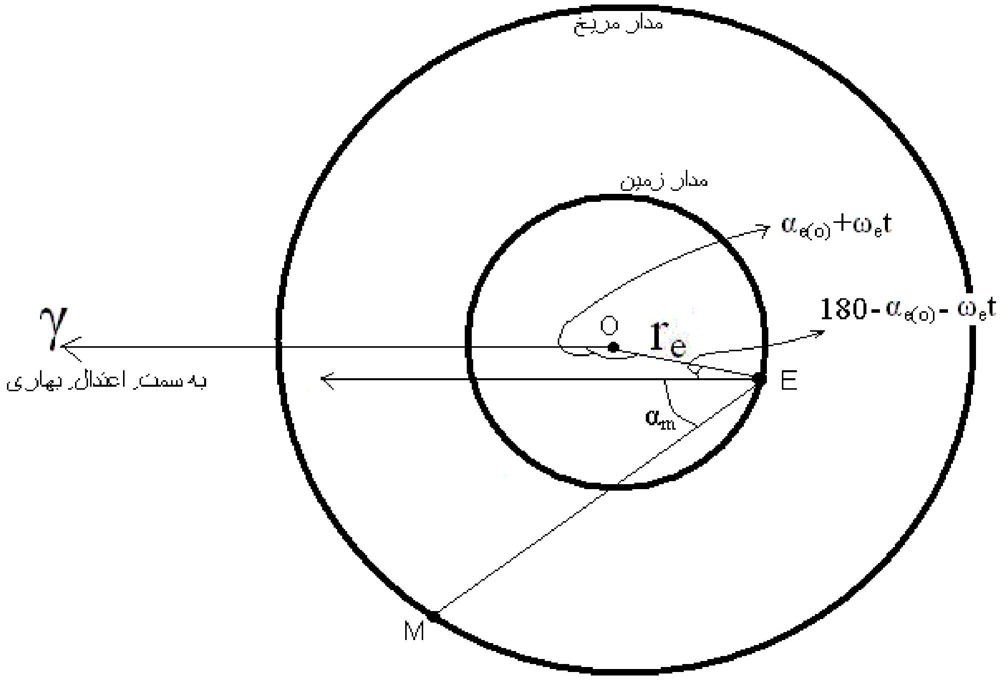
در شکل:

$$ME^2 = {r_m}^2 + {r_e}^2 - 2r_m r_e \cos(\alpha_{e(o)} + \omega_e t - \alpha_{m(o)} - \omega_m t)$$
$${r_m}^2 = ME^2 + {r_e}^2 - 2ME.r_e \cos\theta$$

ME را جاگذاری می کنیم و عبارت را ساده می کنیم:

$$0 = r_e - r_m \cos(\alpha_{e(o)} + \omega_e t - \alpha_{m(o)} - \omega_m t)$$
$$-\sqrt{{r_m}^2 + {r_e}^2 - 2r_m r_e \cos(\alpha_{e(o)} + \omega_e t - \alpha_{m(o)} - \omega_m t)}\cos\theta$$
$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{r_e - r_m \cos(\alpha_{e(o)} + \omega_e t - \alpha_{m(o)} - \omega_m t)}{\sqrt{{r_m}^2 + {r_e}^2 - 2r_m r_e \cos(\alpha_{e(o)} + \omega_e t - \alpha_{m(o)} - \omega_m t)}}\right)$$

اما ما زاویه ای را می خواهیم که مریخ در هر لحظه با اعتدال بهاری می سازد.برای بدست آوردنِ آن از نقطه ی E خطی به سمتِ اعتدالِ بهاری رسم می کنیم.ما زاویه ی بینِ این خط و مریخ (که در واقع بعدِ مریخ است) را می خواهیم.به شکل نگاه کنید:



$$\alpha_m = \theta - (180 - \alpha_{e(o)} - \omega_e t) =$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{r_e - r_m\cos(\alpha_{e(o)} + \omega_e t - \alpha_{m(o)} - \omega_m t)}{\sqrt{{r_m}^2 + {r_e}^2 - 2r_m r_e\cos(\alpha_{e(o)} + \omega_e t - \alpha_{m(o)} - \omega_m t)}}\right) - 180 + \alpha_{e(o)} + \omega_e t =$$

$$\cos^{-1}\left(-\frac{r_e - r_m\cos(\alpha_{e(o)} + \omega_e t - \alpha_{m(o)} - \omega_m t)}{\sqrt{{r_m}^2 + {r_e}^2 - 2r_m r_e\cos(\alpha_{e(o)} + \omega_e t - \alpha_{m(o)} - \omega_m t)}}\right) + \alpha_{e(o)} + \omega_e t$$

شاید فکر کنید که این نتیجه تنها برای حالت های خاصی درست است اما توابع مثلثاتی معمولا اهلِ خیانت نیستند.

تنها یک چیزِ دیگر می ماند که اگر t مقدارش از حدی بیشتر شود α_m (یعنی زاویه ی بینِ مریخ و اعتدال بهاری) بزرگتر از ۳٦۰ درجه می شود که بعید می دانم بشود اسمش را گذاشت ایراد.

اما اگر بخواهیم همیشه زاویه کوچکتر از 2π باشد.جوابِ سوال می شود:

$$\alpha_m - 2\pi\left[\frac{\alpha_m}{2\pi}\right]$$

۷- چون پاسخِ کامل به این سوال نیازمندِ وجودِ تصویرِ نمودارِ HR است و این نمودار در پاسخنامه بوده است، پس به توضیحی در خصوصِ جواب اکتفا می کنیم.

الف)ابتدا باید خطی که مربوط به ستارگانی است که شعاعِ برابر با شعاعِ خورشید دارند را بر روی نمودار مشخص کنیم:

$$M_{star} - M_{sun} = 2.5\log(\frac{L_{sun}}{L_{star}}) = 2.5\log(\frac{R_{sun}^2 T_{sun}^4}{R_{star}^2 T_{star}^4})$$

$$R_{sun} = R_{star} \Rightarrow M_{star} - M_{sun} = 2.5\log(\frac{T_{sun}^4}{T_{star}^4}) = 10\log(\frac{T_{sun}}{T_{star}}) = 10\log T_{sun} - 10\log T_{star}$$

$$M_{star} = M_{sun} + 10\log T_{sun} - 10\log T_{star} \quad \Rightarrow M_{star} = a\log T_{star} + b$$

$$a = -10$$

$$b = M_{sun} + 10\log T_{sun} = 42.3$$

باید خط $M_{star} = a\log T_{star} + b$ را بر روی نمودار **HR** رسم کنیم.با توجه به اینکه محور افقی $\log T_{star}$ بوده است.کشیدن این خط آسان است. با توجه به اینکه محدوده ای که شعاع ستارگان بیشتر از خورشید است مد نظر سوال است. بنابراین باید ناحیه ی بالای این خط را مشخص کنیم.

ب) قدر مطلق ستاره ای که درخشندگی اش ۱۰ برابر خورشید است را بدست می آوریم:

$$M_{star} - M_{sun} = 2.5\log(\frac{L_{sun}}{L_{star}}) = 2.5\log(\frac{1}{10})$$

$$\Rightarrow M_{star} = 2.22$$

جواب قسمت (ب) بخشی از نمودار است که ستارگان دارای قدر مطلق بیش تر از ۲/۲۲ را نشان می دهد. یعنی قسمت پایین خط $M_{star} = 2.22$.

پ)باید ستاره های مشترک بین قسمت الف و ب را بشمارید.