



نام

نام خانوادگی

محل امضاء



صبح جمعه

۹۱/۱/۲۵

اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می شود.

امام خمینی (ره)

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

آزمون ورودی
دوره های دکتری (نیمه متمرکز) داخل
در سال ۱۳۹۱

رشته ی
مهندسی برق - مخابرات (میدان) (کد ۲۳۰۲)

شماره داوطلبی:

نام و نام خانوادگی داوطلب:

مدت پاسخگویی: ۱۵۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۴۵

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	مجموعه دروس تخصصی (الکترومغناطیس، ریاضیات مهندسی پیشرفته، الکترومغناطیس پیشرفته)	۴۵	۱	۴۵

فروردین سال ۱۳۹۱

استفاده از ماشین حساب مجاز نمی باشد.

حق چاپ و تکثیر سؤالات پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می باشد و با متغییرن برابر مقررات رفتار می شود.

۱- اگر $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ فاصله از مبدا در مختصات کروی باشد، حاصل انتگرال زیر روی حجم کره‌ای به شعاع ۱ و به

$$I = \int_V (1 + e^{-\alpha r}) \nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) dv ; \quad (\alpha \text{ ثابت است})$$

$$-8\pi \quad (۱) \quad 4\pi \quad (۲)$$

$$4\pi \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) \quad (۴) \quad 8\pi \quad (۳)$$

۲- بر روی هر یک از ۸ رأس یک مکعب به مرکز مبدأ مختصات و ضلع ۲ متر، بار نقطه‌ای q قرار دارد. شاری که از صفحه $2x + 2y + z = 1$ می‌گذرد، چند کولمب است؟

$$\frac{q}{2} \quad (۲) \quad \text{صفر} \quad (۱)$$

$$2q \quad (۴) \quad q \quad (۳)$$

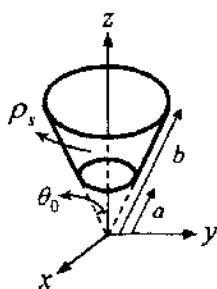
۳- در شکل مقابل، باری با توزیع سطحی یکنواخت ρ_s (کولمب بر متر مربع) روی سطح جانبی پوسته مخروط ناقصی با زاویه رأس θ_0 نسبت به محور z و در فاصله $a < R < b$ قرار دارد. میدان الکتریکی، $\vec{E}$ ، در مبدأ مختصات برابر است با:

$$\frac{-\rho_s \cos \theta_0}{2\epsilon_0} (b-a) \hat{z} \quad (۱)$$

$$\frac{-\rho_s \sin \theta_0 \cos \theta_0}{2\epsilon_0} (b-a) \hat{z} \quad (۲)$$

$$\frac{-\rho_s \sin \theta_0 \cos \theta_0}{2\epsilon_0} \ln \frac{b}{a} \hat{z} \quad (۳)$$

$$\frac{-\rho_s \cos \theta_0}{2\epsilon_0} \ln \left(\frac{b}{a} \right) \hat{z} \quad (۴)$$



۴- برای توزیع بار حجمی زیر در دستگاه مختصات دکارتی داریم:

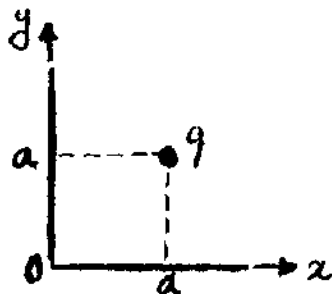
$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{|z|}{a}}$$

که در آن $a > 0$ و $-\infty \leq z \leq \infty$ می‌باشد. شدت میدان الکتریکی $\vec{E}$ در ناحیه $z > 0$ برابر است با:

$$\frac{\rho_0 a}{4\epsilon_0} (1 - e^{-\frac{z}{a}}) \hat{z} \quad (۲) \quad \frac{\rho_0 a}{\epsilon_0} (1 - e^{-\frac{z}{a}}) \hat{z} \quad (۱)$$

$$\frac{2\rho_0 a}{\epsilon_0} (1 - e^{-\frac{z}{a}}) \hat{z} \quad (۴) \quad \frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0} (1 - e^{-\frac{z}{a}}) \hat{z} \quad (۳)$$

- ۵- بار نقطه‌ای q مطابق شکل به فاصله a از دو صفحه رسانای نیمه محدود زمین شده قرار دارد. نیروی وارد بر صفحات، $\vec{F}$ ، کدام است؟



$$(1) \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) (\hat{x} + \hat{y})$$

$$(2) \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 a^2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) (\hat{x} + \hat{y})$$

$$(3) \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) (\hat{x} + \hat{y})$$

$$(4) \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 a^2} \left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) (\hat{x} + \hat{y})$$

- ۶- لایه عایقی به ضخامت d متر بین $z=0$ و $z=d$ در فضای آزاد قرار دارد. ضریب گذردهی الکتریکی عایق $\epsilon = \epsilon_0 e^{\frac{z}{d}}$ است. اگر عایق در معرض میدان خارجی ثابت $\vec{E} = E_0 \hat{z}$ قرار گیرد، آنگاه چگالی بار مقید حجمی چند کولمب بر متر مکعب است؟

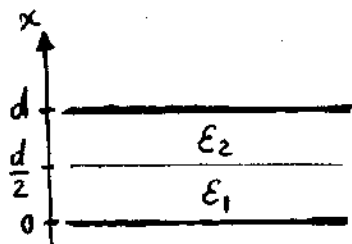
$$(1) -\frac{E_0}{d} e^{-\frac{z}{d}}$$

$$(2) -\frac{\epsilon_0 E_0}{d} e^{-\frac{z}{d}}$$

$$(3) \frac{E_0}{d} e^{-\frac{z}{d}}$$

$$(4) \frac{\epsilon_0 E_0}{d} e^{-\frac{z}{d}}$$

- ۷- خازن مسطحی مطابق شکل از دو صفحه رسانا با مساحت‌های S که به فاصله d از هم قرار دارند تشکیل شده است $(\sqrt{S} \gg d)$. بین دو صفحه از عایق‌هایی با گذردهی‌های $\epsilon_1 = 2\epsilon_0$ و $\epsilon_2 = 3\epsilon_0$ پر شده است. اگر میدان شکست عایق‌های اول و دوم به ترتیب برابر E_0 و $\frac{1}{2}E_0$ (ولت بر متر) باشد (E_0 مقداری ثابت است)، حداکثر بار الکتریکی مجازی که می‌توان روی این خازن قرار داد، چقدر است؟



$$(1) 5\epsilon_0 SE_0$$

$$(2) \epsilon_0 SE_0$$

$$(3) 1/5 \epsilon_0 SE_0$$

$$(4) 2\epsilon_0 SE_0$$

- ۸- یک دو قطبی با ممان $\vec{p} = Q\vec{d}$ (Moment) در راستای $\hat{z}$ بر روی محور z قرار گرفته است. انرژی ذخیره شده در ناحیه $r \gg a$ از این مجموعه، برابر است با:

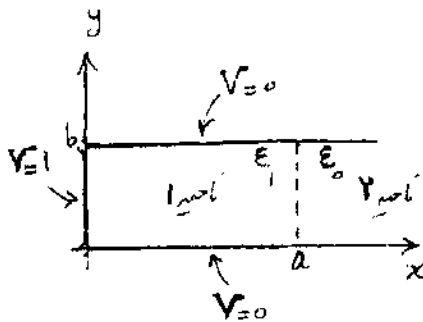
$$\begin{aligned} (۱) \quad & \frac{Q^2 d^2}{6\pi\epsilon_0 a^3} \\ (۲) \quad & \frac{Q^2 d^2}{12\pi\epsilon_0 a^3} \\ (۳) \quad & \frac{Q^2 d^2}{18\pi\epsilon_0 a^3} \\ (۴) \quad & \frac{Q^2 d^2}{24\pi\epsilon_0 a^3} \end{aligned}$$

- ۹- یک کره عایق به شعاع a تحت تأثیر یک میدان خارجی، به صورت $\vec{P} = P_0 \hat{z}$ قطبی شده است. P_0 ثابت می‌باشد. شدت میدان الکتریکی ناشی از بارهای معادل قطبی شدگی در فاصله دور از این کره چقدر است؟

$$\begin{aligned} (۱) \quad & \text{صفر} \\ (۲) \quad & \frac{P_0}{4\epsilon_0\pi} \frac{a^3}{R^3} (\hat{r} \cos\theta \hat{R} + \hat{\theta} \sin\theta) \\ (۳) \quad & \frac{P_0}{3\epsilon_0} \frac{a^3}{R^3} (\hat{r} \cos\theta \hat{R} + \hat{\theta} \sin\theta) \\ (۴) \quad & P_0 (\hat{R} \cos\theta + \hat{\theta} \sin\theta) \end{aligned}$$

- ۱۰- دو الکترود صفحه‌ای موازی نیمه بی‌نهایت با پتانسیل صفر در فاصله b از یکدیگر قرار دارند. الکترود سومی عمود بر این دو و مجزا شده از آنها در پتانسیل ۱ ولت نگه داشته می‌شود. اگر مطابق شکل ناحیه محصور به دو قسمت با ضریب گذردهی الکتریکی ϵ_1 و ϵ_0 تقسیم شود، پتانسیل در ناحیه دوم کدام است؟

$$(۱) \quad \frac{\epsilon_1}{\pi} \sum_{\text{فرد } n} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{2b} y\right) \frac{e^{-\frac{n\pi}{b}(x-a)}}{\epsilon_1 \cosh\left(\frac{n\pi}{b} a\right) + \epsilon_0 \sinh\left(\frac{n\pi}{b} a\right)}$$



$$(۲) \quad \frac{2\epsilon_1}{\pi} \sum_{\text{فرد } n} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{2b} y\right) \frac{e^{-\frac{n\pi}{b}(x-a)}}{\epsilon_1 \cosh\left(\frac{n\pi}{b} a\right) + \epsilon_0 \sinh\left(\frac{n\pi}{b} a\right)}$$

$$(۳) \quad \frac{4\epsilon_1}{\pi} \sum_{\text{فرد } n} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \frac{e^{-\frac{n\pi}{b}(x-a)}}{\epsilon_1 \cosh\left(\frac{n\pi}{b} a\right) + \epsilon_0 \sinh\left(\frac{n\pi}{b} a\right)}$$

$$(۴) \quad \frac{4\epsilon_1}{\pi} \sum_{\text{فرد } n} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{2b} y\right) \frac{e^{-\frac{n\pi}{b}(x-a)}}{\epsilon_1 \cosh\left(\frac{n\pi}{b} a\right) + \epsilon_0 \sinh\left(\frac{n\pi}{b} a\right)}$$

۱۱- مطابق شکل یک سیم حامل جریان در مرز بین دو محیط با نفوذپذیریهای μ_1 و μ_2 قرار گرفته است. شدت میدان مغناطیسی در دو محیط چیست؟



$$\vec{H}_1 = \frac{I_0}{\pi r} \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \hat{\phi}, \quad \vec{H}_2 = \frac{I_0}{\pi r} \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \hat{\phi} \quad (1)$$

$$\vec{H}_1 = \frac{I_0}{\pi} \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \hat{\phi}, \quad \vec{H}_2 = \frac{I_0}{\pi} \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \hat{\phi} \quad (2)$$

$$\vec{H}_1 = \frac{I_0}{\pi r} \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \hat{\phi}, \quad \vec{H}_2 = \frac{I_0}{\pi r} \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \hat{\phi} \quad (3)$$

$$\vec{H}_1 = \frac{I_0}{\pi} \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \hat{\phi}, \quad \vec{H}_2 = \frac{I_0}{\pi} \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \hat{\phi} \quad (4)$$

۱۲- بینهایت رشتهٔ رسانا و نامحدود در صفحه $x = 0$ در موقعیت‌های $y = k$ و $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ قرار گرفته‌اند. از هر یک از رشته‌ها، جریان یک آمپر در جهت z عبور می‌کند. میدان مغناطیسی $\vec{H}$ در $(1, 0, 0)$ برابر است با:

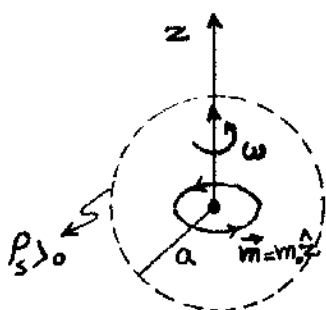
$$-\frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2} \right] \hat{y} \quad (1)$$

$$-\frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2} \right] \hat{y} \quad (2)$$

$$\frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2} \right] \hat{y} \quad (3)$$

$$\frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2} \right] \hat{y} \quad (4)$$

۱۳- یک دو قطبی مغناطیسی با ممان $\vec{m} = m_0 \hat{z}$ (Moment) در مرکز یک پوسته کروی باردار با چگالی سطحی یکنواخت ρ_s ($\rho_s > 0$) قرار گرفته است. این کره با چه سرعتی و در چه جهتی حول محور z ها بچرخد تا میدان مغناطیسی در خارج کره باردار صفر شود؟



$$\frac{m_0}{4\pi a^2 \rho_s} \quad (1) \text{ در جهت دایره مثلثاتی}$$

$$\frac{2m_0}{4\pi a^2 \rho_s} \quad (2) \text{ در جهت دایره مثلثاتی}$$

$$\frac{m_0}{4\pi a^2 \rho_s} \quad (3) \text{ در خلاف جهت دایره مثلثاتی}$$

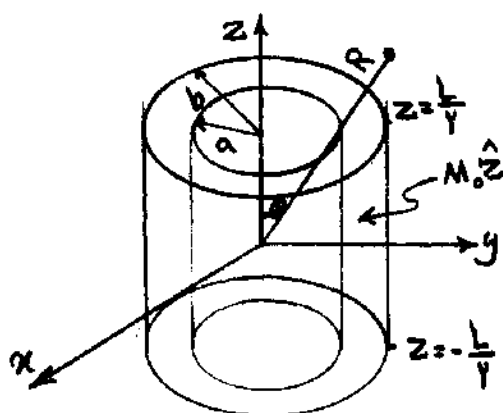
$$\frac{2m_0}{4\pi a^2 \rho_s} \quad (4) \text{ در خلاف جهت دایره مثلثاتی}$$

۱۴- مطابق شکل ناحیه استوانه‌ای

$$-\frac{1}{2} \leq z \leq \frac{1}{2}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, a \leq r \leq b$$

از ماده مغناطیسی با مغناطیس شدگی (Magnetization) ثابت $M_o \hat{z}$ پر شده است و بقیه جاها خلاء است. مقدار V_m

(پتانسیل مغناطیسی عددی) در یک نقطه دور به طوری که $R \gg L$ باشد برای $a = \frac{L}{2}$ و $b = L$ ، چقدر است؟



$$\frac{1}{4} \frac{L^3 M_o}{R^3} \cos \theta \quad (1)$$

$$\frac{3}{16} \frac{L^3 M_o}{R^3} \cos \theta \quad (2)$$

$$\frac{1}{8} \frac{L^3 M_o}{R^3} \cos \theta \quad (3)$$

$$\frac{1}{16} \frac{L^3 M_o}{R^3} \cos \theta \quad (4)$$

۱۵- یک آهنربای استوانه‌ای با مقطع دایره‌ای به شعاع a و طول L به مرکز مبدأ مختصات در راستای محور z از یک ماده

مغناطیسی با بردار مغناطیس شدگی $\vec{M} = M_o |z| \hat{z}$ داده شده است. شار گذرنده از یک حلقه دایروی به مرکز $(0, 0, z)$

و به شعاع a موازی با صفحه xy در فاصله بسیار زیاد ($z \gg L, a$) کدام است؟

$$\frac{\mu_o M_o L^2 a^2 \pi}{8 z^3} \quad (1)$$

$$\frac{\mu_o M_o L^2 a^2 \pi}{4 z^3} \quad (2)$$

$$\frac{\mu_o M_o L a^2 \pi}{4 z^3} \quad (3)$$

$$\frac{3 \mu_o M_o L^2 a^2 \pi}{8 z^3} \quad (4)$$

۱۶- یک تابعک (Functional) به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$F[u(x, y)] = \iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + uf(x, y) \right] dx dy$$

برای آنکه این «تابعک» اکسترمم (ماکزیمم یا مینیمم) شود، تابع دو متغیره $u(x, y)$ کدام معادله را باید برآورده سازد؟

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f(x, y) \quad (۱)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{2} f(x, y) \quad (۲)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y) \quad (۳)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y) \quad (۴)$$

۱۷- در نظریه توزیع (Distribution) اگر $\phi(x)$ یک تابع آزمون (Test Function) باشد، برای توزیع دیراک داریم:

$$\langle \delta(x), \phi(x) \rangle \rightarrow \phi(0)$$

در این صورت:

$$\langle \frac{d^2 \delta(x)}{dx^2} + \frac{d\delta(x)}{dx}, \phi(x) \rangle \rightarrow ?$$

$$-\phi''(0) - \phi'(0) \quad (۱)$$

$$-\phi''(0) + \phi'(0) \quad (۲)$$

$$\phi''(0) - \phi'(0) \quad (۳)$$

$$\phi''(0) + \phi'(0) \quad (۴)$$

۱۸- اگر «تابع» دلتای دیراک را در مختصات استوانه‌ای در حوزه طیفی به شکل زیر بنویسیم:

$$\frac{\delta(r-r')}{r} = \int_0^\infty A(\lambda) J_0(\lambda r) \lambda d\lambda$$

که در آن r فاصله از محور z (در مختصات استوانه‌ای) است، در این صورت A برابر است با:

$$\frac{1}{2\pi} J_0(\lambda r') \quad (۱)$$

$$\frac{1}{\pi} J_0(\lambda r') \quad (۲)$$

$$\frac{2}{\pi} J_0(\lambda r') \quad (۳)$$

$$J_0(\lambda r') \quad (۴)$$

۱۹- معادلهٔ ناهمگن حرارت به صورت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = h(x, t) \quad ; \quad t \geq 0$$

تابع گرین مربوط به معادله، $G(x, t, x', t')$ ، از حل کدام معادله به دست می‌آید؟

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} - \frac{\partial G}{\partial t} = \delta(x - x') \delta(t - t') \quad (۱)$$

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} - \frac{\partial G}{\partial t} = \delta(x - x') \delta(t + t') \quad (۲)$$

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial G}{\partial t} = \delta(x - x') \delta(t - t') \quad (۳)$$

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial G}{\partial t} = \delta(x - x') \delta(t + t') \quad (۴)$$

۲۰- معادلهٔ انتگرالی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$y(x) = 1 + \lambda \int_0^1 (1 - x t) y(t) dt$$

تحت کدام یک از شرایط زیر پاسخ مسأله یکتاست؟

$$\lambda \neq \pm 1 \quad (۱)$$

$$\lambda \neq \pm 2 \quad (۲)$$

$$\lambda \neq \pm \frac{1}{3} \quad (۳)$$

$$\lambda \neq \pm 3 \quad (۴)$$

۲۱- اگر T یک تبدیل خطی روی فضای ماتریس $n \times n$ باشد که $T(A) = A^t$ (t نماد ترانپوز)، چند جمله‌ای مینیمال T کدام گزینه است؟

$$\psi(\lambda) = \lambda^2 - 1 \quad (۱)$$

$$\psi(\lambda) = (\lambda - 1)^2 \quad (۲)$$

$$\psi(\lambda) = (\lambda + 1)^2 \quad (۳)$$

(۴) با این اطلاعات نمی‌توان چند جمله‌ای مینیمال را تعیین کرد.

۲۲- جواب معادله دیفرانسیل لاپلاس با شرایط مرزی داده شده زیر:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

$$u(r, 0) = 0$$

$$u\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad 1 \leq r \leq 2$$

$$u(1, \theta) = 0 \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$u(2, \theta) = \sin 2\theta (1 - \cos 2\theta)$$

کدام گزینه است؟

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2} r \sin 2\theta - \frac{1}{8} r^2 \sin 4\theta \quad (1)$$

$$u(r, \theta) = \frac{r^4}{r^2} \sin 2\theta - \frac{\lambda}{r^4} \sin 4\theta \quad (2)$$

$$u(r, 0) = \frac{r^4}{16} \left(r^2 - \frac{1}{r^2} \right) \sin 2\theta - \frac{\lambda}{256} \left(r^4 - \frac{1}{r^4} \right) \sin 4\theta \quad (3)$$

$$u(r, \theta) = \frac{r^2}{3} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin 2\theta - \frac{r^2}{16} \left(r^2 - \frac{1}{r^2} \right) \sin 4\theta \quad (4)$$

۲۳- حاصل انتگرال $\oint \frac{z^2 \sin(\bar{z})}{(z+16)} dz$ را روی مسیری به دست آورید که از تبدیل محور x ها توسط تبدیل $w = 2 \left(\frac{z-i}{z+i} \right)$ در

جهت مثلثاتی حاصل می‌شود.

$$-\frac{4\pi}{3}i \quad (1)$$

$$-\frac{\pi}{6}i \quad (2)$$

$$0 \quad (3)$$

$$\frac{4\pi}{3}i \quad (4)$$

۲۴- فرض کنیم M زیر مجموعه‌ای از $C_0^\infty(\mathbb{R})$ (فضای برداری توابع آزمون) باشد مرکب از عناصری که مشتق اول عنصری از

$C_0^\infty(\mathbb{R})$ هستند. اگر ϕ_0 یک تابع آزمون مفروضی باشد به قسمی که $\int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(x) dx = 1$. آنگاه به ازای هر

$$\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$$

(۱) $\phi(x) = a\phi_0(x) + \psi(x)$ به ازای ثابت یکتای a و یک عنصر یکتای $\psi \in M$.

(۲) $\phi(x) = a\phi_0(x) + \psi(x)$ به ازای یک ثابت a و یک عنصر $\psi \in M$ که لزومی ندارد یکتا باشند.

(۳) $\phi(x) = a\phi_0(x)$ که در آن ثابت a یکتاست و از انتگرالگیری از طرفین این رابطه از $-\infty$ تا $+\infty$ به دست می‌آید.

(۴) ممکن است تجزیه‌ای به صورت $\phi = a\phi_0 + \psi$ برای تابع ϕ وجود نداشته باشد.

۲۵- اپراتور خطی $-D^2 = -\frac{d^2}{dx^2}$ را بر فضاهای خطی زیر در نظر می‌گیریم:

$$S = \{u \in C^2[a, b] : u'(a) = 0 = u'(b)\}, \quad T = \{u \in C^2[a, b] : u(a) = 0 = u(b)\}$$

که در آن $C^2[a, b]$ مجموعه کلیه توابع دارای مشتقات پیوسته مرتبه دوم بر بازه $[a, b]$ است با ضرب داخلی معمولی

$$\langle u, v \rangle = \int_a^b u(x) \overline{v(x)} dx$$

برای کمیت $\langle u, -D^2 u \rangle$ کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

(۱) $\langle u, -D^2 u \rangle > 0$ بر روی S و T به ازای همه $u \neq 0$.

(۲) $\langle u, -D^2 u \rangle > 0$ صحیح نیست به ازای برخی $u \neq 0$ بر S و به ازای برخی $u \neq 0$ بر T .

(۳) $\langle u, -D^2 u \rangle > 0$ بر روی S به ازای همه $u \neq 0$ ، اما این کمیت می‌تواند صفر شود به ازای برخی $u \neq 0$ بر T .

(۴) $\langle u, -D^2 u \rangle$ مثبت است بر روی T به ازای همه $u \neq 0$ ، اما کمیت مذکور می‌تواند صفر شود به ازای برخی $u \neq 0$ بر

روی S .

۲۶- می‌دانیم که تابع گرین $g(x, \xi)$ مسئله دیریشله برای یک حوزه $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ، محصور شده به وسیله یک رویه بسته تکه‌ای هموار S ، جواب مسئله زیر است:

$$\begin{cases} -\nabla_x^2 g(X; \xi) = \delta(X - \xi) & , \quad \forall X \in \Omega \\ g(X; \xi) = 0, \quad \forall X \in S, \quad \xi \in \Omega, \quad \xi \notin S \end{cases}$$

در این صورت جواب مسئله مقدار مرزی دیریشله:

$$\begin{cases} -\nabla^2 u = q(X), \quad \forall X \in \Omega \\ u(X) = b(X), \quad \forall X \in S \end{cases}$$

($q(X)$ پیوسته و $b(X)$ تکه‌ای هموار داده شده‌اند.)

کدام است؟

$$u(X) = \int_{\Omega} g(X; \xi) q(\xi) d\xi - \int_S \frac{\partial g}{\partial n}(X; \xi) b(\xi) d\sigma \quad (۱)$$

$$u(X) = \int_{\Omega} g(X; \xi) b(\xi) d\xi - \int_S \frac{\partial g}{\partial n}(X; \xi) q(\xi) d\sigma \quad (۲)$$

$$u(X) = \int_{\Omega} g(X; \xi) q(\xi) d\xi + \int_S \frac{\partial g}{\partial n}(X; \xi) b(\xi) d\sigma \quad (۳)$$

$$u(X) = \int_S \frac{\partial g}{\partial n}(X; \xi) b(\xi) d\sigma - \int_{\Omega} g(X; \xi) q(\xi) d\xi \quad (۴)$$

۲۷- فرض کنید k_1 یک تابع تکه‌ای پیوسته از دو متغیر داده شده باشد. اپراتور انتگرال ولترای L تعریف می‌شود با

$$L[\phi](x) = \int_0^x k_1(x, \xi) \phi(\xi) d\xi$$

انتگرال ولتراست با هسته $k_1(x, \xi)$ به صورت:

$$\int_x^y k_1(x, \xi) k_1(\xi, y) d\xi \quad (۱)$$

$$\int_0^x k_1(x, \xi) k_1(\xi, y) d\xi \quad (۲)$$

$$\int_y^x k_1(x, \xi) k_1(\xi, y) d\xi \quad (۳)$$

$$\int_0^y k_1(x, \xi) k_1(\xi, y) d\xi \quad (۴)$$

۲۸- معادله دیفرانسیل با شرایط مرزی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} (xy')' + \frac{\lambda}{x} y = 0 & , 1 < x < a \\ y(1) = 0 = y(a) \end{cases} \quad (\text{یک مسئله مقدار ویژه تابع ویژه})$$

جواب این مسئله کدام است؟

$$y_k(x) = \sin\left(k\pi \frac{\ln x}{\ln a}\right), \lambda_k = (k\pi)^2 \quad (۱)$$

$$y_k(x) = \sin\left(k\pi \frac{\ln x}{\ln a}\right), \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{\ln a}\right)^2 \quad (۲)$$

$$y_k(x) = \sin\left(k\pi \frac{\ln x}{\ln a}\right), \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{\ln a}\right)^2 \quad (۳)$$

$$y_k(x) = \frac{\ln x}{\ln a} \cos\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi \frac{\ln x}{\ln a}\right), \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{\ln a}\right)^2 \quad (۴)$$

۲۹- جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی لاپلاس در داخل استوانه نیمه نامتناهی $r \leq a$ و $z \geq 0$ با شرایط مرزی داده

شده کدام است؟ (J_0 تابع بسل معمولی و I_0 تابع بسل اصلاح شده، هر دو نوع اول از مرتبه صفر)

$$\begin{cases} \nabla^2 u(r, \theta, z) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 & (\text{در داخل استوانه}) \\ u(r, \theta, 0) = 0 & \text{بر قاعده} \end{cases}$$

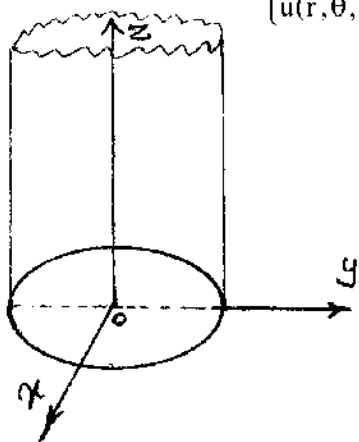
$$u(a, \theta, z) = \phi(z) = e^{-z} \quad (\text{بر بدنه})$$

$$u(r, \theta, z) = \int_0^\infty B(\alpha) J_0(\alpha r) \sinh(\alpha z) d\alpha \quad (۱)$$

$$u(r, \theta, z) = \int_0^\infty B(\alpha) I_0(\alpha r) \sin(\alpha z) d\alpha \quad (۲)$$

$$u(r, \theta, z) = \int_0^\infty B(\alpha) I_0(\alpha r) \sinh(\alpha z) d\alpha \quad (۳)$$

$$u(r, \theta, z) = \int_0^\infty B(\alpha) J_0(\alpha r) \sin(\alpha z) d\alpha \quad (۴)$$



۳۰- مقدار حدود

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} (\ln x) \cos(nx) dx = I$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} (\ln x) \sin(nx) dx = J$$

کدام است؟

(۱) هر دو صفر می‌باشند.

(۲) J برابر با صفر و I وجود ندارد.(۳) J برابر با صفر و I برابر با یک است.

(۴) هر دو وجود ندارند.

۳۱- برای یک محیط خطی بدون تلف، همگن و ناهمسانگرد (anisotropic) در مورد قضیه هم پاسخی لورنتز (Lorentz Reciprocity) کدام گزینه صحیح است؟

(۱) همواره قضیه هم پاسخی لورنتز برقرار است.

(۲) هیچگاه قضیه هم پاسخی لورنتز برقرار نیست.

(۳) شرط کافی برای برقراری قضیه هم پاسخی لورنتز، متقارن بودن تانسورهای $\bar{\epsilon}$ و $\bar{\mu}$ است.(۴) شرط لازم و کافی برای برقراری قضیه هم پاسخی لورنتز، قطری بودن تانسورهای $\bar{\epsilon}$ و $\bar{\mu}$ است.

۳۲- در حالت کلی برای یک موج صفحه‌ای در حال انتشار در یک محیط ساده (خطی، همگن، همسانگرد (isotropic)) به صورت

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(-j\vec{k} \cdot \vec{r}), \text{ بردار موج } \vec{k} \text{ را می‌توان بر حسب بردارهای حقیقی ثابت فاز } (\vec{\beta}) \text{ و ثابت تضعیف } (\vec{\alpha}) \text{ به صورت}$$

$$\vec{k} = \vec{\beta} - j\vec{\alpha} \text{ نوشت. در این صورت:}$$

(۱) برای محیط بدون تلف $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$.(۲) $\vec{\alpha} \neq 0$ نشانه تلفاتی بودن محیط است.(۳) همواره $\vec{\alpha} \times \vec{k} = 0$ و $\vec{\alpha} \times \vec{\beta} = 0$.(۴) برای محیط تلفاتی با عدد موج مختلط $k = k' - jk''$ ، $k' = |\vec{\beta}|$ و $k'' = |\vec{\alpha}|$.

۳۳- در یک موجبر تیغه عایقی (dielectric slab waveguide)، کدام تعریف برای فرکانس قطع صحیح است؟

(۱) فرکانسی است که در آن ثابت انتشار در جهت انتشار صفر می‌شود.

(۲) فرکانسی است که در آن ثابت انتشار در جهت عمود بر تیغه و خارج آن صفر می‌شود.

(۳) فرکانسی است که در آن ثابت انتشار در جهت انتشار از یک عدد حقیقی به یک عدد مختلط تبدیل می‌شود.

(۴) فرکانسی است که در آن ثابت انتشار در جهت انتشار از یک عدد حقیقی به عدد موهومی (انگاری) تبدیل می‌شود.

۳۴- مکعبی به ضلع a با دیواره‌های رسانای کامل مغناطیسی (PMC) با عایقی به ضریب عایقی نسبی $\epsilon_r = 2$ پر شده و تشکیل یک تشدید کننده (Resonator) داده است. کمترین فرکانس زاویه‌ای تشدید ω این تشدید کنند را برابر است با:

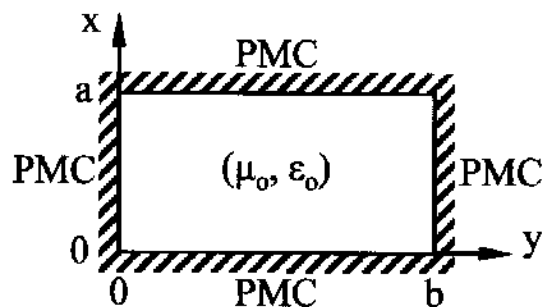
$$\frac{\pi}{a\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \quad (۱)$$

$$\frac{\pi}{a\sqrt{2\mu_0\epsilon_0}} \quad (۲)$$

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{a\sqrt{2\mu_0\epsilon_0}} \quad (۳)$$

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{a\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \quad (۴)$$

۳۵- یک موجبر مستطیلی با دیواره‌های رسانای کامل مغناطیسی (PMC) مطابق شکل مفروض است. فرم مناسب تابع پتانسیل ψ برای یک مود TM_z کدام است؟ (m و n همزمان صفر نیستند).



$$\psi = \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{\pm jk_z z} \quad , \quad m = 0, 1, \dots \quad , \quad n = 1, 2, \dots \quad (۱)$$

$$\psi = \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{\pm jk_z z} \quad , \quad m = 1, 2, \dots \quad , \quad n = 0, 1, \dots \quad (۲)$$

$$\psi = \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{\pm jk_z z} \quad , \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (۳)$$

$$\psi = \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{\pm jk_z z} \quad , \quad m, n = 0, 1, 2, \dots \quad (۴)$$

۳۶- همانند شکل یک تیغه عایق همگن بر روی یک صفحه رسانای کامل الکتریکی (PEC) قرار دارد. در بالای تیغه عایق، فضا خالی است. فرض کنید یکی از مدهای TM نسبت به z این موجبر در جهت $\hat{z}$ در حال انتشار باشد. برای این مود نسبت اندازه مؤلفه x میدان الکتریکی در نقطه $(x, y, z) = (b, 0, 0)$ به اندازه این مؤلفه در نقطه $(x, y, z) = (a, 0, 0)$ برابر

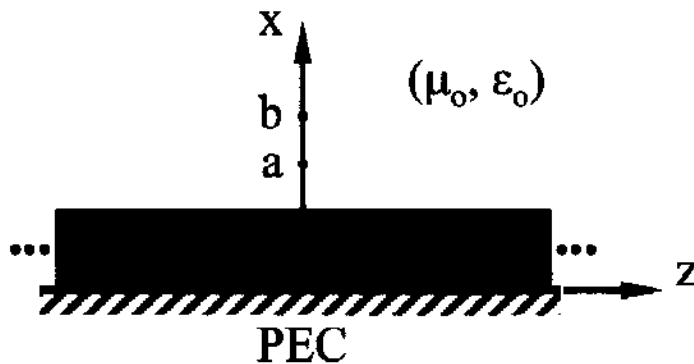
$$\exp\left(\frac{\pi(a-b)}{\lambda_0}\right) \text{ است. اگر } \beta \text{ ثابت فاز این مود TM و } k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0} \text{ باشد، آنگاه نسبت } \frac{\beta}{k_0} \text{ کدام است؟}$$

$$\frac{\Delta}{4} \quad (1)$$

$$\sqrt{2} \quad (2)$$

$$2 \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{2} \quad (4)$$



۳۷- ناحیه $y > 0$ از ماده با $\epsilon_r = 1$ و $\mu_r = 4$ پر شده است. ناحیه $y < 0$ هوا است ($\epsilon_r = 1$ و $\mu_r = 1$). موج صفحه‌ای یکنواخت $\vec{E}^i = \hat{x} e^{-jk_0 y}$ به فصل مشترک این دو نیم فضا تابانده می‌شود. جریان مؤثر (جریان معادل حجمی) مغناطیسی این نیم فضا (ناحیه $y > 0$ وقتی با هوا جایگزین می‌شود) برابر است با:

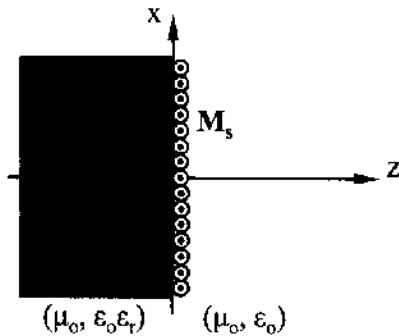
$$-2j\omega \frac{\mu_0}{\eta_0} e^{-j\gamma k_0 y} \hat{z} \quad (1)$$

$$-j\omega \frac{\mu_0}{\eta_0} e^{-j\gamma k_0 y} \hat{z} \quad (2)$$

$$-2j\omega \frac{\mu_0}{\eta_0} e^{-jk_0 y} \hat{z} \quad (3)$$

$$-j\omega \frac{\mu_0}{\eta_0} e^{-jk_0 y} \hat{z} \quad (4)$$

۳۸- در شکل زیر ناحیه $z > 0$ فضای خالی و ناحیه $z < 0$ یک نیم فضای عایق با ضریب گذردهی نسبی $\epsilon_r = 9$ است. حال توسط یک منبع، جریان مغناطیسی سطحی با تغییرات زمانی $\exp(j\omega t)$ و فیزور $\vec{M}_s = 4\hat{y}$ روی فصل مشترک $z = 0$ برقرار می‌شود. در این شرایط فیزور میدان الکتریکی در ناحیه $z > 0$ کدام است؟



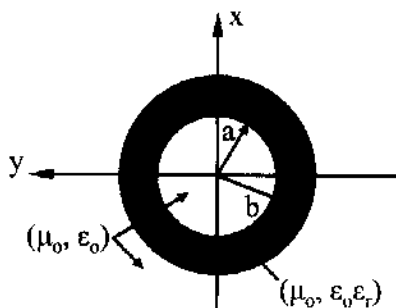
$$-\hat{x}z \exp(-j\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}z) \quad (1)$$

$$-\hat{x}z \exp(-j\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}z) \quad (2)$$

$$-\hat{x}\frac{18}{5} \exp(-j\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}z) \quad (3)$$

$$-\hat{x}6 \exp(-j\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}z) \quad (4)$$

۳۹- همانند شکل موج صفحه‌ای $\vec{E}^i = E_0 e^{-jk_0 x} \hat{z}$ به یک استوانه عایقی توخالی با طول بینهایت که محور آن همان محور z است، تابانده می‌شود. شکل کلی میدان الکتریکی $\vec{E}(r, \phi)$ در داخل استوانه (ناحیه $r \leq a$) توسط کدام رابطه داده می‌شود؟



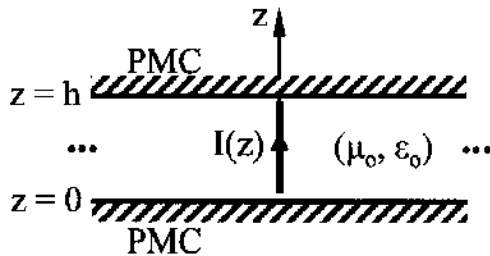
$$\hat{z} \sum_n a_n J_n(k_0 r) \sin(n\phi) \quad (1)$$

$$\hat{z} \sum_n a_n J_n(k_0 r) \cos(n\phi) \quad (2)$$

$$\hat{z} \sum_n (a_n H_n^{(r)}(k_0 r) + b_n J_n(k_0 r)) \sin(n\phi) \quad (3)$$

$$\hat{z} \sum_n (a_n H_n^{(r)}(k_0 r) + b_n J_n(k_0 r)) \cos(n\phi) \quad (4)$$

۴۰- همانند شکل دو صفحه $z = h$ و $z = 0$ دو صفحه رسانای کامل مغناطیسی (PMC) می‌باشند و فضای بین آنها خالی است. حال جریان رشته‌ای (filament) الکتریکی تابع z روی محور z (برای $0 < z < h$) توزیع می‌شود. پتانسیل برداری مغناطیسی $\vec{A}$ ناشی از $I(z)$ در نقطه (r, ϕ, z) بین دو صفحه با کدام رابطه زیر داده می‌شود؟ می‌دانیم $k_o = \omega \sqrt{\mu_o \epsilon_o}$.



$$\hat{z} \sum_{n=1}^{\infty} a_n H_o^{(r)} \left(\sqrt{k_o^2 - \left(\frac{n\pi}{h} \right)^2} r \right) \sin \left(\frac{n\pi}{h} z \right) \quad (۱)$$

$$\hat{z} \sum_{n=0}^{\infty} a_n H_o^{(r)} \left(\sqrt{k_o^2 - \left(\frac{n\pi}{h} \right)^2} r \right) \cos \left(\frac{n\pi}{h} z \right) \quad (۲)$$

$$\hat{z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n H_n^{(r)} \left(\sqrt{k_o^2 - \left(\frac{n\pi}{h} \right)^2} r \right) \sin \left(\frac{n\pi}{h} z \right) e^{+jn\phi} \quad (۳)$$

$$\hat{z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{mn} H_m^{(r)} \left(\sqrt{k_o^2 - \left(\frac{n\pi}{h} \right)^2} r \right) \cos \left(\frac{n\pi}{h} z \right) e^{+jm\phi} \quad (۴)$$

۴۱- یک کره از جنس رسانای کامل (PEC) به شعاع a و به مرکز مبدا مختصات در فضای خالی قرار دارد. این کره در معرض میدان موج صفحه‌ای یکنواخت $\vec{E}^i = \hat{x} \exp(-jk_o z)$ با $k_o = \omega \sqrt{\mu_o \epsilon_o}$ قرار می‌گیرد. در این شرایط روی سطح کره جریان سطحی با چگالی $\vec{J}_s$ القا می‌شود. حال فرض کنید این جریان سطحی $\vec{J}_s$ عیناً به فضای خالی روی سطح $r = a$ منتقل شود و در غیاب کره PEC و $\vec{E}^i$ در اطراف خود میدان الکترومغناطیسی تشعشع کند. در این صورت میدان الکتریکی ناشی از $\vec{J}_s$ در مبدا مختصات کدام است؟

$$-2\hat{x} \quad (۱)$$

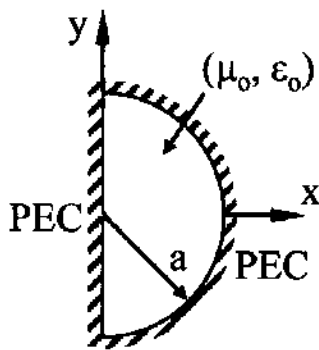
$$-\hat{x} \quad (۲)$$

$$-\frac{1}{2}\hat{x} \quad (۳)$$

$$0 \quad (۴)$$

۴۲- در شکل زیر سطح مقطع یک موجبر نیم استوانه به شعاع a که دیواره‌های آن از جنس رسانای کامل الکتریکی (PEC) است، نمایش داده شده است. تابع پتانسیل برداری مغناطیسی $\vec{A}$ برای مدهای TM نسبت به z در نقطه (r, φ, z) کدام است؟

می‌دانیم $k_o = \omega \sqrt{\mu_o \epsilon_o}$ و x_{nm} ریشه m ام تابع $J_n(x)$ و x'_{nm} ریشه m ام تابع $J'_n(x)$ است.



$$\hat{z} J_n \left(\frac{x_{nm}}{a} r \right) \sin \left(n\varphi + \frac{n\pi}{2} \right) \exp \left(\pm j \sqrt{k_o^2 - \left(\frac{x_{nm}}{a} \right)^2} z \right) \quad (۱)$$

$$\hat{z} J_n \left(\frac{x'_{nm}}{a} r \right) \sin \left(n\varphi + \frac{n\pi}{2} \right) \exp \left(\pm j \sqrt{k_o^2 - \left(\frac{x'_{nm}}{a} \right)^2} z \right) \quad (۲)$$

$$\hat{z} J_n \left(\frac{x'_{nm}}{a} r \right) \cos \left(n\varphi + \frac{n\pi}{2} \right) \exp \left(\pm j \sqrt{k_o^2 - \left(\frac{x'_{nm}}{a} \right)^2} z \right) \quad (۳)$$

$$\hat{z} J_n \left(\frac{x_{nm}}{a} r \right) \cos \left(n\varphi + \frac{n\pi}{2} \right) \exp \left(\pm j \sqrt{k_o^2 - \left(\frac{x_{nm}}{a} \right)^2} z \right) \quad (۴)$$

۴۳- در شکل زیر جریان رشته‌ای با فیزور ثابت I_o که نسبت به z یکنواخت است، در مجاورت یک گوشه قائم از جنس رسانای کامل (PEC) تشعشع می‌کند. در این صورت اندازه فیزور میدان الکتریکی ایجاد شده در محل $(x, y, z) = (a, 0, 0)$ با فرض $1 \ll k_o a$ برابر $\frac{V}{m}$ اندازه‌گیری شده است. اندازه فیزور میدان الکتریکی در محل $(x, y, z) = (\frac{1}{2}a, 0, 0)$ کدام است؟

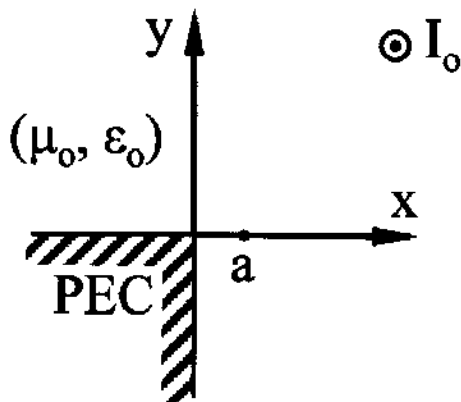
$$(J_v(x)) \approx \frac{1}{v!} \left(\frac{x}{2} \right)^v \quad \text{می‌دانیم برای } x \ll 1 \text{ و } v > 0 \text{ داریم}$$

$$\frac{2}{2^2} \quad (۱)$$

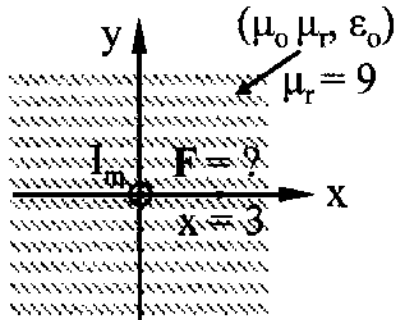
$$\frac{2}{2^3} \quad (۲)$$

$$\left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{2}{2}} \quad (۳)$$

$$\left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{2}{2}} \quad (۴)$$



- ۴۴- در یک فضای همگن با ضریب نفوذپذیری مغناطیسی نسبی $\mu_r = 9$ یک رشته جریان مغناطیسی یکنواخت با تغییرات هارمونیک $I_m e^{j\omega t}$ در امتداد محور z برقرار شده است. پتانسیل برداری الکتریکی $\vec{F}$ در نقطه $(x, y, z) = (3, 0, 0)$ ناشی از این رشته جریان مغناطیسی کدام است؟ (می‌دانیم $\lim_{x \rightarrow 0} x H_0^{(2)}(x) = \frac{\gamma}{j\pi}$)



$$\frac{I_m}{j12} H_0^{(2)}(\gamma \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}) \hat{z} \quad (1)$$

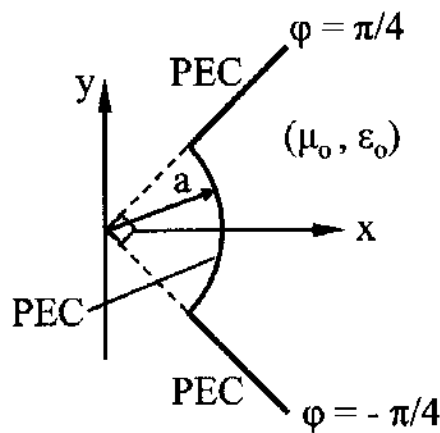
$$\frac{I_m}{j12} H_0^{(2)}(\gamma \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}) \hat{z} \quad (2)$$

$$\frac{I_m}{j4} H_0^{(2)}(\gamma \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}) \hat{z} \quad (3)$$

$$\frac{I_m}{j4} H_0^{(2)}(\gamma \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}) \hat{z} \quad (4)$$

- ۴۵- موج صفحه‌ای یکنواخت $\vec{E}^i = \hat{z} E_0 \exp(+jk_0 x)$ به ساختار ربع استوانه رسانای کامل الکتریکی (PEC) به شعاع a که مطابق شکل در یک کنج قائم رسانای کامل قرار گرفته است، می‌تابد. میدان کل برابر است با:

$$(k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \text{ همچنین } e^{-j r \cos \phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (j)^{-n} J_n(r) e^{jn\phi} \text{ می‌دانیم})$$



$$E_z = E_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{1 + e^{jn\pi} - e^{jn\frac{\pi}{4}} - e^{-jn\frac{\pi}{4}}\} J_n\left(\frac{X_n r}{a}\right) e^{jn\phi} \quad (1)$$

$$E_z = E_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} j^{-n} \sin\left(\phi - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\phi + \frac{\pi}{4}\right) \left[J_n(k_0 r) - \frac{J_n(k_0 a)}{H_n^{(2)}(k_0 a)} H_n^{(2)}(k_0 r) \right] \quad (2)$$

$$E_z = E_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (j^{-n} - 1)(1 + (-1)^n) \left[J_n(k_0 r) - \frac{J_n(k_0 a)}{H_n^{(2)}(k_0 a)} H_n^{(2)}(k_0 r) \right] e^{jn\phi} \quad (3)$$

$$E_z = E_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{1 + e^{jn\pi} - e^{jn\frac{\pi}{4}} - e^{-jn\frac{\pi}{4}}\} \left[J_n(k_0 r) - \frac{J_n(k_0 a)}{H_n^{(2)}(k_0 a)} H_n^{(2)}(k_0 r) \right] e^{jn\phi} \quad (4)$$