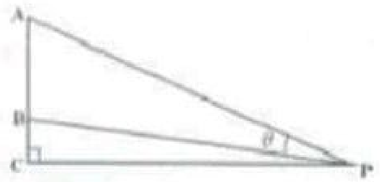
به نام خدا

---

۱ در شکل روبرو فرض کنید طول پاره خط AB برابر با 9، طول پارخط BC برابر با 3، طول پاره خط CP برابر با x و زاویه دید نقطه P از پارخط AB برابر با θ باشد.

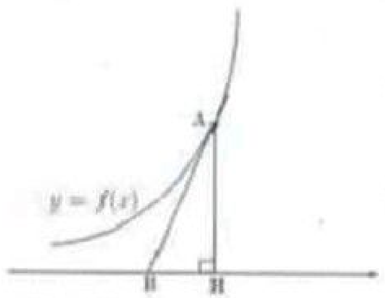


الف) مقدار θ را بر حسب x محاسبه کنید.

ب) برای چه مقداری از $x \in]0, +\infty[$، زاویه دید θ بیشترین مقدار ممکن است؟

ج) یك نمودار تقریبی از تغییرات θ وقتی x در بازه $]0, +\infty[$ تغییر می کند رسم نمایید. (در این نمودار صعودی، نزولی بودن تابع و همچنین تحدب و تقعر آن را مشخص کنید).

(الف)(۵ نمره)، (ب)(۸ نمره)، (ج) (۷ نمره)



۲ همه توابع مشتق پذیر $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را چنان بیابید که برای هر نقطه A روی نمودار این تابع خط مماس بر نمودار این تابع در نقطه A حتما محور x ها را در یك نقطه یکتای B قطع کند (نقطه B وابسته به A است) و فاصله B تا H (H پای عمود خارج شده از A بر محور x ها است) برابر مقدار ثابت $a > 0$ باشد.

(۱۵ نمره)

۳ ثابت کنید انتگرال ناسره زیر همگراست:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}\,dx$$

(۱۵ نمره)

۴ فرض کنید $f(x) \geqslant 0$ یك تابع پیوسته و صعودی روی فاصله $[1, +\infty[$ است. نشان دهید:

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \leqslant \int_1^n f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=2}^{n} f(k).$$

سپس فرض کنید $f(x) = \ln x$، نامساوی زیر را نتیجه گیری کنید:

$$n^n e^{-n+1} \leqslant n! \leqslant (n+1)^{n+1} e^{-n}.$$

(۱۵ نمره)

ادامه پشت صفحه

۵ سری $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ را در نظر گیرید.

الف) نشان دهید برای $|x| < 1$ سری فوق به $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ همگراست. (۸ نمره)

ب) نتیجه گیری کنید برای $0 < x < 1$ داریم $\ln\frac{1+x}{1-x} > 2x$. (۵ نمره)

ج) به کمک قسمت (ب) نشان دهید $e < 3$. (۷ نمره)

۶ برای $n \geqslant 1$، تعریف می کنیم $a_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$.

الف) نشان دهید $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$. (۵ نمره)

ب) نشان دهید $\lim_{n\to+\infty} \frac{1-a_n}{\frac{1}{n}} = \ln(2)$. (۵ نمره)

ج) در همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{+\infty}(1-a_n)$ بحث کنید (با ذکر دلیل). (۵ نمره)

موفق باشید

بسمه تعالی

راه حل سؤالات امتحان پایان ترم ریاضی عمومی ۱

پاییز ۱۳۹۰

راه حل سؤال ۱:

داریم:

$$\theta = \tan^{-1}\frac{a}{x} - \tan^{-1}\frac{b}{x}$$

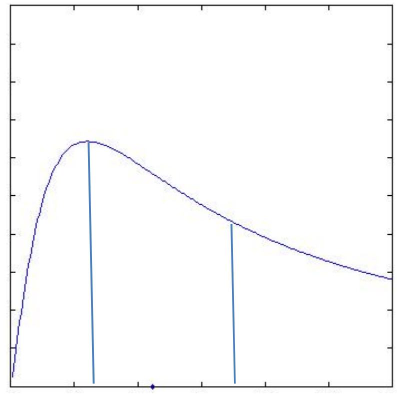
که در آن $a = \overline{AC} = 12$ و $b = \overline{BC} = 3$. پس $\frac{d\theta}{dx} = -\frac{a}{x^2+a^2} + \frac{b}{x^2+b^2}$. بنابر این مشتق θ صفر است اگر و تنها اگر $x^2 = ab$ یعنی $x = 6$. به علاوه:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2\theta}{dx^2} = \frac{2ax}{(x^2+a^2)^2} - \frac{2bx}{(x^2+b^2)^2} > 0 \quad \Leftrightarrow a(x^2+b^2)^2 > b(x^2+a^2)^2\\
&\Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})x^2 > \sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+b+\sqrt{ab})\\
&\Leftrightarrow x^2 > 6\times 21 \Leftrightarrow x > 3\sqrt{14}
\end{aligned}$$

بنابراین دارمی $\theta''(6) < 0$. پس $x = 6$ یک ماکزیمم موضعی است. هم‌چنین داریم

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+}\theta(x) = \tan^{-1}(+\infty) - \tan^{-1}(+\infty) = 0\\
&\lim_{x\to +\infty}\theta(x) = \tan^{-1}(0) - \tan^{-1}(0) = 0
\end{aligned}$$

پس $x = 6$ ماکزیمم مطلق است.



راه حل سؤال ۲:

ابتدا معادلهٔ خط مماس بر نقطهٔ A به مختصات $(t, f(t))$ روی نمودار تابع را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{y - f(t)}{x - t} = f'(t)$$

این خط محور x ها را در نقطهٔ B قطع می‌کند. مختصات این نقطه به ازای $y = ۰$ در معادلهٔ فوق به‌دست می‌آید. بنابراین مؤلفهٔ x نقطهٔ B برابر است با $t - \dfrac{f(t)}{f'(t)}$.

چون فاصلهٔ B, H همواره برابر با مقدار ثابت a است، پس داریم:

$$\left| t - (t - \frac{f(t)}{f'(t)}) \right| = a$$

یا معادلاً

$$\left| \frac{f(t)}{f'(t)} \right| = a$$

چون تابع f پیوسته و f' همواره مخالف صفر است، پس $\dfrac{f}{f'}$ یک تابع پیوسته است (فرض می‌کنیم f' پیوسته است، هرچند نیازی نیست). پس رابطهٔ فوق معادل است با

$$\forall t : \frac{f(t)}{f'(t)} = a \text{ یا } \forall t : \frac{f(t)}{f'(t)} = -a$$

می‌دانیم تنها توابعی که در معادلهٔ $f'(t) = \lambda f(t)$ صدق می‌کنند، توابع به شکل $f(t) = ce^{\lambda t}$ ها هستند که c یک مقدار ثابت است. پس کلاً به دو دسته جواب $f(t) = ce^{-\frac{1}{a}t}$ و $f(t) = ce^{\frac{1}{a}t}$ می‌رسیم.

توجه کنید که c ناصفر است.

راه حل سؤال ۳:

باید ثابت کنیم انتگرال‌های زیر همگرا هستند:

$$II = \int_1^\infty \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2} dx \text{ و } I = \int_0^1 \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2} dx$$

برای اثبات همگرایی I، با استفاده از دستور هوپیتال داریم:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2xe^{-x^2}}{2x} = \lim_{x \to 0} e^{-x^2} = 1$$

بنابراین تابع $\frac{1 - e^{-x^2}}{x^2}$ روی بازهٔ $[0,1]$ کران‌دار است. این تابع پیوسته هم هست. بنابراین I همگرا است.

برای اثبات همگرایی II به وضوح داریم:

$$\forall x \geq 1 : \quad 0 \leq \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

حال چون $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = 1$ همگرا است، پس II نیز همگرا است.

راه حل سؤال ۴:

برای $x \geq ۱$، $f(x) \geq ۰$ پیوسته و صعودی است. افراز $p = \{۱, ۲, \cdots, n\}$ از بازهٔ $[۱, n]$ را در نظر بگیرید. پس:

$$\sum_{i=۱}^{n-۱} m([i-۱, i]) \leq \int_a^b f \leq \sum_{i=۲}^{n} M([i-۱, i])$$

بنابراین $\sum_{k=۱}^{n-۱} f(k) \geq \int_۱^n f$ و $\sum_{k=۲}^{n} f(k) \leq \int_۱^n f$.

حال برای تابع $f(x) = \ln(x)$ داریم:

$$u = ۱ \quad , \quad v = \ln(x)$$
$$\Rightarrow \int_۱^n ۱ \times ln(x)dx = x \ln x \Big|_۱^n - \int_۱^n dx = n \ln n - n + ۱$$

پس طبق قسمت قبل داریم

$$\sum_{k=۱}^{n-۱} \ln k \leq n \ln n - n + ۱ \leq \sum_{k=۲}^{n} \ln k$$

بنابراین از یک طرف:

$$\ln ۱ + \ln ۲ + \cdots + \ln(n-۱) \leq n \ln n - n + ۱$$
$$\Rightarrow \ln ۱ + \ln ۲ + \cdots + \ln n \leq (n+۱) \ln(n+۱) - (n+۱) + ۱$$
$$\Rightarrow \ln(n!) \leq \ln(n+۱)^{(n+۱)} - n$$
$$\Rightarrow n! \leq (n+۱)^{(n+۱)} e^{-n}$$

و از طرف دیگر:

$$n \ln n - n + ۱ \leq \ln ۲ + \ln ۳ + \cdots + \ln n = \ln(n!)$$
$$\Rightarrow n! \geq n^n e^{-n+۱}$$

و حکم ثابت می‌شود.

راه حل سوال ۵:

سری هندسی زیر برای $|x| \leq ۱$ همگرا است:

$$\frac{۱}{۱-x} = ۱ + x + x^{۲} + \cdots$$

بنابراین طبق قضیه می‌توانیم از طرفین جمله به جمله انتگرال بگیریم:

$$-\ln(۱-x) = x + \frac{x^{۲}}{۲} + \frac{x^{۳}}{۳} + \cdots$$

به طور مشابه:

$$\frac{۱}{۱+x} = ۱ - x + x^{۲} - \cdots + (-۱)^n x^n + \cdots$$

$$\ln(۱+x) = x - \frac{x^{۲}}{۲} + \cdots + \frac{(-۱)^n x^{n+۱}}{n+۱} + \cdots$$

با جمع زدن این دو رابطه داریم:

$$\frac{۱}{۲}\ln(\frac{۱+x}{۱-x}) = \frac{۱}{۲}(\ln(۱+x) - \ln(۱-x)) = x + \frac{x^{۳}}{۳} + \cdots + \frac{x^{۲n+۱}}{۲n+۱} + \cdots$$

حال چون همهٔ جملات این سری مثبت هستند، با در نظر گرفتن جملهٔ اول به دست می‌آوریم که $\ln(\frac{۱+x}{۱-x}) > ۲x$ برای $۰ < x < ۱$. (روش دیگر: در نظر گرفتن تابع $f(x) = \frac{۱}{۲}\ln(\frac{۱+x}{۱-x}) - ۲x$ و اثبات مثبت بودن مشتق آن، صعودی بودن آن و مقایسه با $f(۰)$)

همچنین با قرار دادن $x = \frac{۱}{۲}$ در این نامساوی به دست می‌آوریم:

$$\ln(\frac{۳/۲}{۱/۲}) > ۱ \Rightarrow \ln ۳ > ۱ \Rightarrow e < ۳$$

راه حل سوال ۶:

الف) داریم:

$$۱ - a_n = \int_۰^۱ (۱ - \frac{۱}{۱ + x^n})dx = \int_۰^۱ \frac{x^n}{۱ + x^n} dx$$

از طرفی چون $۰ \leq \frac{x^n}{۱ + x^n} \leq x^n$، با انتگرال‌گیری به‌دست می‌آید $۰ \leq ۱ - a_n \leq \frac{۱}{n + ۱}$. پس $۱ - a_n \to ۰$.

ب) روش اول: قرار می‌دهیم $x^n = u$. بنابر این $nx^{n-۱}dx = du$. پس:

$$۱ - a_n = \frac{۱}{n} \int_۰^۱ \frac{u^{\frac{۱}{n}}}{۱ + u} du \Rightarrow n(۱ - a_n) = \int_۰^۱ \frac{u^{\frac{۱}{n}}}{۱ + u} du$$

از طرفی $\ln ۲ = \int_۰^۱ \frac{۱}{۱ + u} du$. بنابراین:

$$\ln ۲ - n(۱ - a_n) = \int_۰^۱ \frac{۱ - u^{\frac{۱}{n}}}{۱ + u} du$$

داریم $۰ \leq \frac{۱ - u^{\frac{۱}{n}}}{۱ + u} \leq ۱ - u^{\frac{۱}{n}}$ پس با انتگرال گیری از دو طرف به‌دست می‌آید

$$۰ \leq \ln ۲ - n(۱ - a_n) \leq ۱ - \frac{۱}{۱ + \frac{۱}{n}}$$

بنابراین $\ln ۲ - n(۱ - a_n) \to ۰$ و حکم ثابت می‌شود.

روش دوم: اثبات نامساوی $۱ - x^n \leq \frac{۱}{۱ + x^n} \leq ۱$ و انتگرال‌گیری از طرفین؛ سپس محاسبهٔ حد طرفین.

روش سوم: از فرمول جزء به جزء به صورت زیر استفاده می‌کنیم.

$$\frac{۱ - a_n}{۱ / n} = \int_۰^۱ \frac{nx^n}{۱ + x^n} dx = x \ln(۱ + x^n)\Big|_۰^۱ - \int_۰^۱ \ln(۱ + x^n) dx$$

سپس از طرفین نامساوی $\ln(1+x^n) \leq x^n$ انتگرال می‌گیریم و در رابطهٔ فوق جایگذاری می‌کنیم. سپس حد آن را محاسبه می‌کنیم.

ج) با استفاده از قسمت ب به دست می‌آوریم از جایی به بعد $\frac{1}{n} \times \frac{\ln 2}{2} \geq a_n - 1$ و از واگرایی سری $\sum_n \frac{1}{n}$ نتیجه می‌شود که سری $\sum_n 1 - a_n$ واگرا است.