بسمه تعالی

امتحان اول المپیاد فیزیک (دوره‌ی دهم)

مدت امتحان : ۲۴۰ دقیقه

۹۳/۱۰/۱۷

مسئله‌ی ۱) اگر بخواهیم حرکت موثر الکترون‌ها در مواد را بررسی کنیم در یک نگاه ساده و اولیه می‌توان معادله‌ی حرکت الکترون‌ها را چنین نوشت:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\mathbf{p}}{\tau} + \mathbf{f}_{ext} \qquad (۱)$$

در این رابطه $\mathbf{p}$ تکانه‌ی الکترون است. جمله‌ی اول در سمت راست به طور موثر برهم‌کنش بین الکترون‌ها را نشان می‌دهد و τ ثابتی مثبت است. جمله‌ی دوم نیروی خارجی وارد بر الکترون را نشان می‌دهد، مانند نیروی الکتریکی.

۲) اگر یک بار q در میدان الکتریکی و مغناطیسی حرکت کند، نیروی وارد برا آن از نیروی لورنتز به دست می‌آید:

$$\mathbf{f} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \qquad (۲)$$

که در آن $\mathbf{E}$ میدان الکتریکی، $\mathbf{v}$ سرعت ذره و $\mathbf{B}$ میدان مغناطیسی است.

۳) اگر الکترون‌ها جریانی داشته باشند، چگالی جریان الکتریکی $\mathbf{J}$ چنین تعریف می‌شود:

$$\mathbf{J} = n(-e)\mathbf{v} \qquad (۳)$$

که در آن n چگالی تعداد الکترون‌ها ، $(-e)$ بار الکترون و $\mathbf{v}$ بردار سرعت الکترون‌ها است.

فرض کنید الکترون‌هایی با بار $e-$ و جرم m در صفحه‌ی xy حرکت می‌کنند. میدان الکتریکی خارجی ثابت و در صفحه‌ی حرکت است، $(E_x, E_y, 0)$. میدان مغناطیسی خارجی ثابت و عمود بر صفحه‌ی حرکت است، $(0, 0, B)$.

الف) (۲ نمره) با استفاده از معادله‌ی حرکت داده شده و فرض عدم تغییر تکانه با زمان، رابطه‌ای بین مولفه‌های جریان و میدان الکتریکی بیابید:

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix} \qquad (۴)$$

شما باید مجهول‌های a ، b ، c و d را بر حسب τ و ثوابت σ و ω_c بنویسید:

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}, \qquad \omega_c = \frac{eB}{m} \qquad (۵)$$

ب) (۱نمره) فرض کنید جریان در راستای y صفر است، یعنی $J_y = ۰$. در این حالت ثابت هال را تعریف می‌کنیم:

$$R_H = \frac{E_y}{J_x B} \tag{۶}$$

ثابت هال را با استفاده از بخش الف، بر حسب n و e بنویسید.

ج) (۲ نمره) حال معادله‌ی (۱) را در نظر بگیرید. فرض کنید نیروی خارجی تنها ناشی از میدان الکتریکی متغیر با زمان است:

$$\mathbf{E} = E_\circ \sin(\omega t)\hat{x} \tag{۷}$$

که در آن ω فرکانس زاویه‌ای تناوب است. در این حالت، تکانه‌ی الکترون‌ها پس از گذشت زمان طولانی حالتی تناوبی با فرکانس زاویه‌ای مشابه با میدان خارجی، اما با اختلاف فاز خواهد داشت. تکانه را پس از گذشت زمان طولانی بنویسید.

مسئله ۲

فرض کنید که بار $+q$ در نقطه‌ی $(\cdot, \cdot, \frac{d}{۲})$ و بار $-q$ در نقطه‌ی $(\cdot, \cdot, -\frac{d}{۲})$ قرار دارند. در تمام مساله به علت تقارن حول محور z خود را به صفحه‌ی xz محدود می کنیم.

نقطه‌ای دلخواه چون $(x, \cdot, z)$ در این صفحه در نظر بگیرید. بردار مکان این نقطه با محور z زاویه‌ی θ می‌سازد و اندازه‌ی آن r است. بردار یکه‌ی $\hat{r}$ در جهت افزایش فاصله از مبدا و بردار یکه‌ی $\hat{\theta}$ در جهت افزایش θ تعریف می‌شوند.

الف) در حد $d \to \cdot$ و $q \to \infty$ چنان که $p = qd$ ثابت باشد، یک دوقطبی داریم. میدان الکتریکی دوقطبی را برای یک نقطه‌ی دلخواه از صفحه‌ی xz که در فاصله‌ی r از مبدا است و زاویه‌ی θ با محور z می‌سازد بنویسید. میدان شعاعی را با E_r و میدان مماسی را با E_θ نشان دهید. (۲ نمره)

ب) معادله‌ی $r = r(\theta)$ که توصیف کننده‌ی خطوط میدان است را پیدا کنید. (۳ نمره)

مسئله‌ی ۳

صفحه‌ی $z = 0$، نارسانا و دارای چگالی بار سطحی $\sigma = \sigma_0 a^3/(\rho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}$ است که σ_0 و a مقدارهای ثابت و مثبتی هستند و ρ فاصله از محور z است. در تمام مسئله، پتانسیل الکتریکی را در $|z| \to \infty$ صفر بگیرید.

الف) بار الکتریکی کل صفحه، Q، را به دست آورید. (۱ نمره)

در پاسخ بخش‌های ب تا ث فرض کنید علاوه بر توزیع بار روی صفحه، یک بار نقطه‌ای $Q-$ نیز روی محور z و در $z = -a$ قرار دارد.

ب) مؤلفه‌ی z میدان الکتریکی را در $z = 0^+$ و در $z = 0^-$ به دست آورید. (۲ نمره)

پ) شرایط مرزی را برای به دست آوردن پتانسیل در ناحیه‌ی $z > 0$ بنویسید. (۱ نمره)

ت) پتانسیل الکتریکی را در ناحیه‌ی $z > 0$ به دست آورید. (۱ نمره)

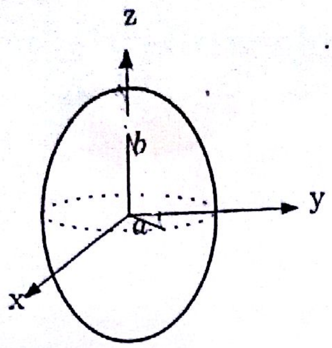
ث) خطوط میدان الکتریکی که در فاصله‌ی R از محور z از صفحه خارج می‌شوند، با زاویه‌ی θ نسبت به محور z به بار نقطه‌ای وارد می‌شوند. θ را بر حسب R و سایر پارامترهای مسئله بیابید. (۱/۵ نمره)

مجدداً فرض کنید که فقط توزیع بار روی صفحه‌ی نارسانا در $z = 0$ موجود است و بار نقطه‌ای $Q-$ وجود ندارد.

ج) میدان الکتریکی را در تمام فضا به دست آورید. (۲ نمره)

چ) شکل خطوط میدان الکتریکی را رسم کنید. (۱/۵ نمره)

مسئله ۴



یک بیضی‌گون دوار به معادله‌ی $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$ در نظر بگیرید. بیضی‌گون نارسانا است و بار الکتریکی با چگالی یکنواخت ρ در حجم آن توزیع شده است.

آ) به ازای $b=a(1+\epsilon)$ (که ϵ ثابت مثبت و کوچکی است) پتانسیل و میدان الکتریکی را تا اولین مرتبه‌ی غیر صفر ϵ در نقطه‌ی $(0,0,h)$ خارج از بیضی‌گون به دست آورید.

ب) مؤلفه‌ی افقی میدان الکتریکی را در نقطه‌ی $(0,\delta,h)$ خارج از بیضی‌گون تا اولین مرتبه‌ی غیر صفر ϵ یا δ به دست آورید. (ϵ و δ هم‌مرتبه اند.)

پ) به ازای $a=b\epsilon$ (که ϵ ثابت مثبت و کوچکی است) پتانسیل و میدان الکتریکی را تا اولین مرتبه‌ی غیر صفر ϵ در نقطه‌ی $(0,0,2b)$ به دست آورید.

انتگرال‌های زیر ممکن است مفید باشند:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{ax+b} &= \frac{1}{a}\ln(ax+b), \quad \int \frac{xdx}{ax+b}=\frac{x}{a}-\frac{b}{a^2}\ln(ax+b)\\
\int \frac{x^2dx}{ax+b} &= \frac{(ax+b)^2}{2a^3}-\frac{2b(ax+b)}{a^3}+\frac{b^2}{a^3}\ln(ax+b)\\
\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} &= \frac{2\sqrt{ax+b}}{a}, \quad \int \frac{xdx}{\sqrt{ax+b}}=\frac{2(ax-2b)}{3a^2}\sqrt{ax+b}\\
\int \frac{x^2dx}{\sqrt{ax+b}} &= \frac{2(3a^2x^2-4abx+8b^2)}{15a^3}\sqrt{ax+b}
\end{aligned}$$

بسمه تعالی

امتحان ترم المپیاد فیزیک (دوره ۱۰ انر)

۲۰/۱۱/۹۳

مدت امتحان: ۴ ساعت

مسئله‌ی ۱)

دیسکی با سرعت زاویه‌ای $\omega(0)$ حول محوری که عمود بر صفحه‌ی دیسک است و از مرکز آن می‌گذرد، می‌چرخد. مورچه‌ای در فاصله‌ی R از محور قرار دارد. مورچه با سرعت ثابت v_0 نسبت به دیسک، به سمت محور حرکت می‌کند. یعنی ناظری که روی دیسک نشسته و با آن می‌چرخد، می‌بیند که مورچه با سرعتی ثابت به محور نزدیک می‌شود. فرض کنید محور دوران بدون اصطکاک است. جرم مورچه را m و لختی دورانی دیسک حول محور دوران را $I = m\beta^2$ بگیرید. برای سادگی در نوشتار، از جرم مورچه در لختی دورانی دیسک استفاده کردیم. این صرفاً بازتعریف ثوابت است. از این پس ثوابت از این قراراند: $m, \omega(0), R, \beta, v_0$.

الف) فاصله‌ی مورچه از محور بر حسب زمان $r(t)$ و سرعت زاویه‌ای دیسک بر حسب زمان $\omega(t)$ را حساب کنید.

ب) معادله‌ی مسیر مورچه، $r = r(\theta)$ را حساب کنید. زاویه‌ی اولیه را صفر بگیرید. نمودار r بر حسب θ را رسم کنید.

ج) مورچه باید چند دور بزند تا به محور برسد؟

د) وقتی مورچه به محور می‌رسد، انرژی چه قدر از میزان اولیه‌ی خود کمتر است؟

ه) بردار نیروی وارد بر مورچه را بر حسب فاصله از محور حساب کنید.

و) ضریب اصطکاک را μ و شتاب گرانش را g بگیرید. اگر شعاع اولیه از مقداری بحرانی چون R_c بزرگتر باشد، حرکت انجام نمی‌شود؛ مورچه بلافاصله به بیرون پرت می‌شود. معادله‌ای بنویسید که از حل آن R_c به دست آید. تا حد امکان معادله را ساده کنید.

مسئله ۲۷)

کره صلب و همگنی به شعاع R در شکل ۱ نشان داده شده است. کره حول محور افقی که از مرکز جرم آن می‌گذرد با سرعت زاویه‌ای $\omega_\circ$ می‌چرخد. در ابتدا مرکز جرم کره ساکن و پایینترین نقطهٔ کره در ارتفاع h از زمین قرار دارد. کره را در شرایط خلأ رها می‌کنیم تا تحت اثر گرانش سقوط کند. پس از برخورد با سطح زمین پایینترین نقطهٔ کره تا ارتفاع مشخص αh (α برابر ارتفاع اولیه) به بالا می‌جهد. تغییرشکل کره و زمین هنگام برخورد ناچیز بوده و ضریب اصطکاک جنبشی میان آنها μ_k معلوم است. زمان برخورد بسیار کوچك و متناهی است. جرم کره m، شتاب ثقل g، و لختی دورانی کره نسبت به محوری که از مرکز جرم آن می‌گذرد $\frac{2}{5}mR^2$ است. مسئله را در دو حالت مجزای زیر حل کنید.

۱ ــ در حالت اول نقطهٔ تماس کره با زمین در تمام مدت برخورد روی زمین می‌لغزد. در این حالت کمیتهای زیر را حساب کنید:

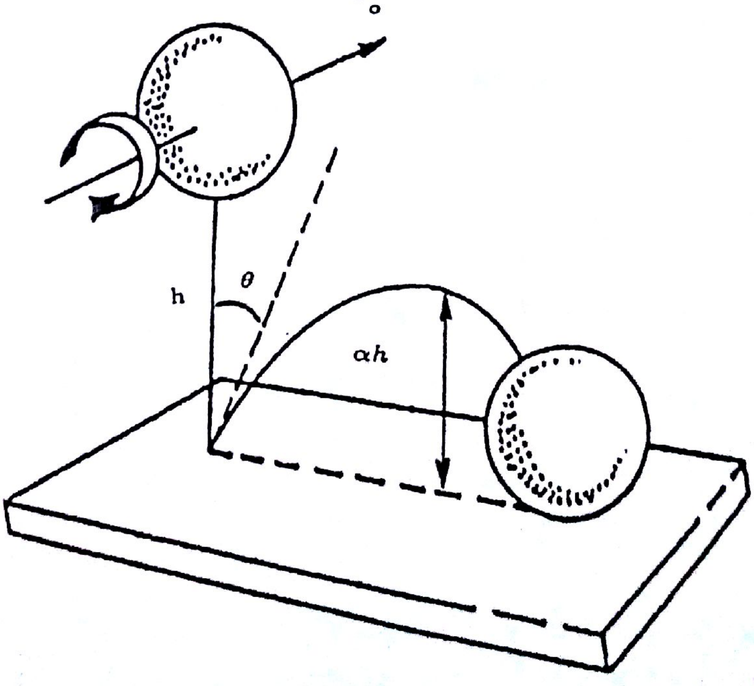
الف) تانژانت زاویهٔ جهش θ (به شکل ۱ نگاه کنید)

ب) فاصلهٔ افقی که مرکز جرم پس از اولین برخورد و قبل از برخورد دوم می‌پیماید.

ج) کمترین مقدار ممکن $\omega_\circ$.

۲ ــ در حالت دوم پیش از آنکه برخورد کره با زمین پایان یابد، لغزش آن متوقف می‌شود. در این حالت نیز کمیتهای بند «الف» و «ب» حالت پیش را به‌دست آورید.

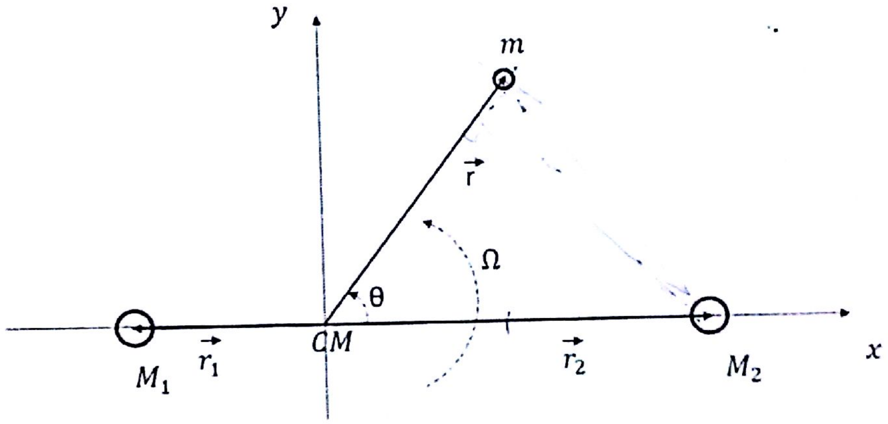
براساس نتایج به‌دست آمده از قسمتهای ۱ و ۲ نموداری تقریبی از رفتار $\mathrm{tg}\,\theta$ برحسب $\omega_\circ$ رسم کنید.



دو جسم نقطه ای به جرمهای M_1 و M_2 و فاصله اولیه a از یکدیگر را در نظر بگیرید. بردار حامل جسم 1 و 2 را از مرکز جرم مشترکشان ، به ترتیب $\vec{r_1}$ و $\vec{r_2}$ می نامیم. در تمامی قسمت های مساله تنها برهم کنش موثر میان اجرام را نیروی گرانشی بین آنها در نظر بگیرید.

الف-با فرض آنکه دو جرم در مدارهایی دایروی، حول مرکز جرم و به فاصله ثابت a از یکدیگر دوران می کنند، بردار سرعت زاویه ای آنها ($\vec{\Omega}$) را بیابید.

اکنون یک جسم سوم و به جرم m را در نظر بگیرید. جرم این جسم بسیار کوچک است به گونه ای که می توان از اثر گرانشی آن بر روی دو جرم دیگر صرف نظر کرد. مطابق شکل زیر دستگاه مختصاتی را منطبق بر مرکز جرم سیستم، و دوار با سرعت زاویه ای Ω را در نظر بگیرید، به گونه ای که محور x این دستگاه همواره در راستای خط واصل جسم 1 و 2 و محور z آن هم جهت با بردار $\vec{\Omega}$ (عمود بر صفحه) است.



بردار حامل جسم m را در این دستگاه $\vec{r} = (r\hat{r} + z\hat{k})$ می نامیم.

ب- انرژی پتانسیل گرانشی جرم m را برحسب مختصات آن در دستگاه استوانه ای بدست آورید و با کمک آن، معادلات مربوط به شتاب این جسم، در دستگاه دوار را تعیین کنید

پ- نقاط تعادل معادله فوق را $\vec{r_0} = (r_0, \theta_0, z_0)$ می نامیم با توجه به جواب قسمت بالا معادلات جبری لازم برای تعیین این نقاط را بنویسید و نشان دهید که نقاط تعادل تنها در صفحه $z = 0$ وجود دارند. در دستگاه دوار پیدا کردن نقاط سکون

ت- معادلات بدست آمده در قسمت پ را برای حالت $\theta_0 \neq 0$ ($\neq \pi$) حل کنید. در این حالت فاصله جسم m را از 2 جسم دیگر و مرکز جرم بدست آورید.(مکان بدست آمده در این بخش را به ازای $y > 0$ ، نقطه تعادل L_4 می نامیم.)

ث- آیا نقطه تعادل L_4 نسبت به اختلال در راستای z پایدار است ؟ در صورت مثبت بودن جواب، فرکانس نوسانات جرم m را حول $z = 0$ بدست آورید.

در ادامه مساله می خواهیم پایداری نقطه L_4 را در صفحه $x - y$ بررسی کنیم.

فرض کنید که جرم m در ابتدا در نقطه L_4 (با مختصاتی که در قسمت ت تعیین کرده اید.) در حالت تعادل قرار دارد . بدلیل یک اختلال کوچک مکان این جرم به میزان $\delta\theta$ و δr (نسبت به ناظر دوار) تغییر می کند.

ج- معادلات شتاب جرم m در دستگاه دوار را تا تقریب خطی نسبت به $\delta r, \delta\theta$ و مشتقات آنها بازنویسی کنید.

چ- بردار $\vec{\Delta}$ را به صورت $\vec{\Delta}=\begin{pmatrix}\delta r\\ r_0\delta\theta\end{pmatrix}$ تعریف می کنیم. نشان دهید که این بردار در معادله زیر صدق می کند

$$\ddot{\vec{\Delta}}= A\vec{\Delta} + B\dot{\vec{\Delta}}$$

که در معادله فوق A و B دو ماتریس ثابت اند که باید تعیین کنید.

جواب معادله ی بدست آمده در قسمت بالا را به صورت $\vec{\Delta}= \vec{\Delta}_0 e^{\lambda t}$ در نظر بگیرید. ($\vec{\Delta}_0$ و λ به ترتیب یک بردار و عدد ثابت می باشند.)

ح- با جایگذاری جواب به صورت داده شده یک معادله جبری برای λ بدست آورده و آن را تا حد امکان ساده کنید

خ- معادله مربوط به λ را حل کنید و درصورت امکان شرطی بین M_1 و M_2 بیابید تا حرکت جرم m پایدار باشد

در سیستم زمین و ماه نقطه L_4 (در صورت پایدار بودن) می تواند به عنوان مکانی برای کاوشگر های فضایی استفاده شود.

د- با توجه به مقادیر عددی زیر آیا نقطه L_4 در سیستم زمین وماه پایدار است ؟

$$M_{earth} = 6 \times 10^{24} Kg$$

$$M_{Moon} = 7 \times 10^{22} Kg$$

$$Distance\ to\ the\ Moon = 384000\ Km.$$

- در صورت لزوم می توانید از راهنمایی های زیر استفاده کنید.

- $f = f(r,\theta) \Rightarrow \Delta f = \frac{\partial f}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial f}{\partial \theta}\Delta\theta$

- $\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \det\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} = 0$

  $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} \neq 0$

- $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

  $i = \sqrt{-1}$

مسئله ۴)

یک چهارقطبی الکتریکی در نظر بگیرید که متشکل است از یک بار نقطه ای $2q$ که در مکان $\vec{r_0} = r_0\hat{z}$ قرار دارد و دو بار نقطه‌ای $-q$ که در مکان‌های $\vec{r_0} \pm d\hat{x}$ قرار گرفته اند d بسیار کوچک است اما $\gamma = qd^2$ مقداری متناهی است. کره ای رسانا به شعاع a $(a < r_0)$ و مرکز مبدأ مختصات در برابر چهار قطبی قرار داده شده و به پتانسیل صفر متصل است. پتانسیل الکتریکی را در نقطه ای به مختصات $\vec{r}$ بر حسب γ، $\vec{r_0}$، a و $\vec{r}$ به دست آورید. (۵ نمره)

۹۴/۱۲/۱۷

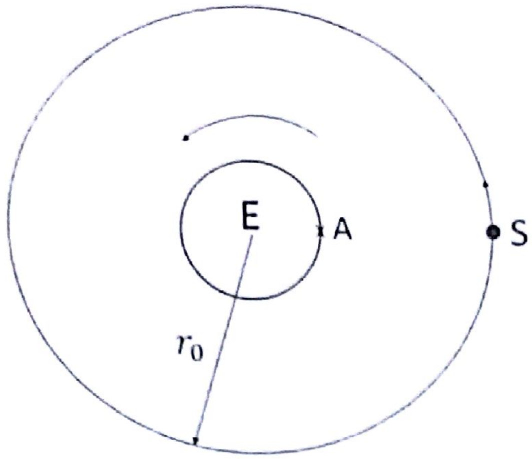
مدت امتحان: ۴ ساعت

بسمه تعالی

امتحان سوم المپیاد فیزیک (دوره ی ۱۰ نفره)

مسئله ی ۱)

ماهوراه های مخابراتی به طور معمول و با توجه به کاربردهای آن ها به گونه ای حرکت می کنند تا در آسمان ناظران زمینی ثابت باشند. برای این منظور باید فاصله این ماهواره ها را به گونه ای تنظیم کنیم تا دوره گردش آنها به دور زمین برابر با یک شبانه روز باشد.



الف- ماهواره ای به جرم $820Kg$ را در نظر بگیرید. فاصله اولیه این ماهواره از مرکز زمین(r_0) و سرعت اولیه آن (v_0) را به گونه ای بیابید تا ماهواره در مداری دایروی و با دوره تناوب24 ساعت به دور مرکز زمین حرکت کند.

- اعداد مورد نیاز در انتهای سوال داده شده اند

اکنون فرض کنید که به دلیل اختلال های وارده از سایر اجرام منظومه شمسی، ماهواره بجز نیروی گرانشی زمین، در معرض یک پتانسیل اضافی به صورت زیر قرار دارد.

$$\Phi_1 = \varepsilon f(r)\cos\theta$$

که در معادله فوق ε یک ثابت مثبت و کوچک و $f(r)$ یک تابع کراندار و مشتق پذیر با شیب ملایم می باشد که توسط داده های رصدی تعیین شده است. همچنین θ زاویه بردار حامل ماهواره در دستگاه قطبی هم صفحه با مدار ماهواره و نسبت به یک راستای ساکن می باشد.(برای سادگی مبدا اندازه گیری θ را مکان اولیه ماهواره در مدار در نظر بگیرید.)

ب- فاصله ماهواره از مرکز زمین بر حسب زمان ، $r(t)$، را تا اولین مرتبه نسبت به ε و با فرض معلوم بودن تابع $f(r)$ و مشتق آن بیابید

پ- با توجه به جواب قسمت بالا، میانگین فاصله ماهواره از مرکز زمین، $< r >$، را N روز بعد از قرار گرفتن در مدار بیابید

ت- سرعت زاویه ای ماهواره برحسب زمان، $\omega(t)$، را تا اولین مرتبه نسبت به ε و مجددا با فرض معلوم بودن تابع $f(r)$ و مشتق آن بیابید

می خواهیم مدار ماهواره را زمانی که میانگین فاصله آن از مرکز زمین به میزان 1% نسبت به r_0 تغییر کرد، تصحیح کنیم

ت- پس از گذشت چند روز مدار ماهواره احتیاج به تصحیح دارد ؟

اکنون مطابق شکل ، ناظر A را که در ابتدا ماهواره را در بالای سر خود مشاهده می کرد در نظر بگیرید. اندازه انحراف زاویه ای ماهواره از ناظر A را نسبت به مرکز زمین ، δ می نامیم

ج- میانگین δ را پس از گذشت مدت زمانی که در قسمت ت بدست آورده اید تعیین کنید. آیا این مقدار قابل ملاحظه است؟ (تنها تعیین مرتبه بزرگی $< \delta >$ کافیست)

- راهنمایی: جواب کلی معادله دیفرانسیل $\ddot{x} + \omega^2 x = C + \alpha \cos \Omega t$ صورت زیر داده می شود

$$If\ \omega \neq \Omega \Rightarrow \quad x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) + \frac{\alpha \cos \Omega t}{\omega^2 - \Omega^2} + \frac{C}{\omega^2}$$

$$If\ \omega = \Omega \Rightarrow \quad x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) + \frac{\alpha t \sin \omega t}{2\omega} + \frac{C}{\omega^2}$$

- ثوابت مورد نیاز

$G = 6.67 \times 10^{-11}\ m^3\ Kg^{-1}\ s^{-2}$

$M_{Earth} = 6 \times 10^{24} Kg$

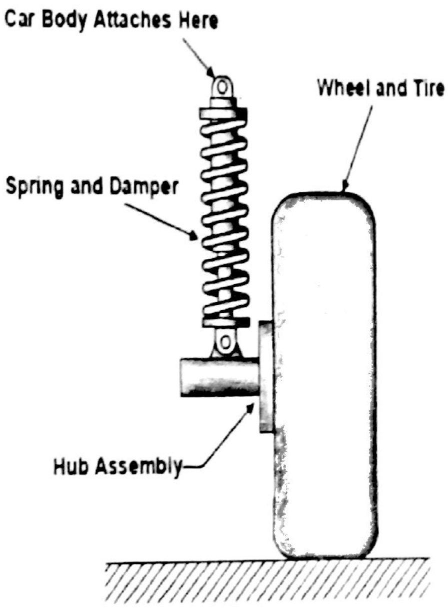
$\frac{\varepsilon f(r_0)}{r_0} \approx \varepsilon f'(r_0) \approx 10^{-5} \frac{m}{s^2}$

مسئله ۲)

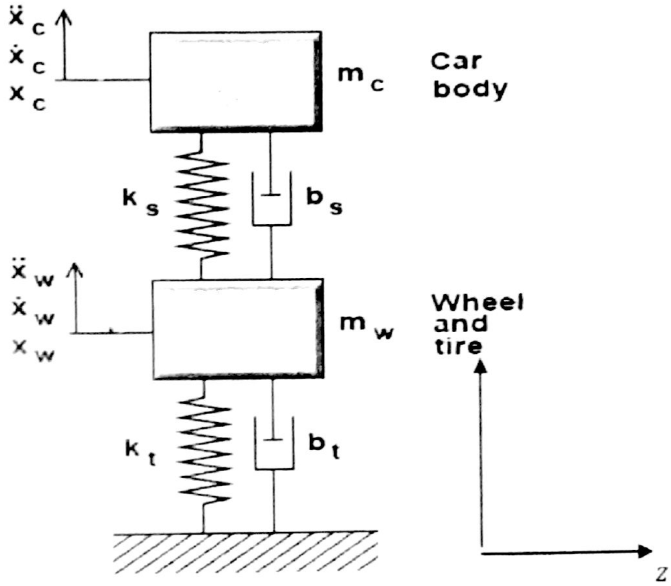
- سیستم تعلیق خودرو

سیستم تعلیق یا فنربندی قسمتی از خودرو است که باعث می‌شود نوسانات حاصل از حرکت خودرو بر روی سطوح ناهموار به اتاق، و سرنشینان آن وارد نشود. در این مسئله می خواهیم یک مدل ساده برای سیستم تعلیق مستقل خودرو ارائه دهیم. این سامانه نوعی از سیستم تعلیق است که در آن هر چرخ به صورت جداگانه و مستقل ارتعاش می کند و ارتعاشات یک چرخ به چرخ دیگر منتقل نمی شود

یک چرخ خودرو را همانند شکل (۱) در نظر بگیرید. این چرخ به یک فنر با ضریب سختی k_s و یک میرا کننده (کمک فنر) با ضریب میرایی b_s متصل شده است. جرم تکیه کننده بر فنر و کمک فنر که شامل سرنشین و متعلقات خودرو می باشدرا m_c می نامیم. همچنین می دانیم که چرخ خودرو یک جسم کاملا صلب نیست. در این مساله چرخ خودرو را با یک جسم به جرم m_w و متصل شده به یک فنر با ضریب سختی k_t و یک میرا کننده با ضریب میرایی b_t مدل می کنیم.(مطابق شکل۲)



شکل (۱)



شکل (۲)

جابجایی جرم m_w و m_c را حول نقطه ای تعادل و در راستای عمودی را به ترتیب x_w و x_c می نامیم. همچنین در شکل ۲ مسیر حرکت خودرو را در جهت راست صفحه (محور z) در نظر می گیریم

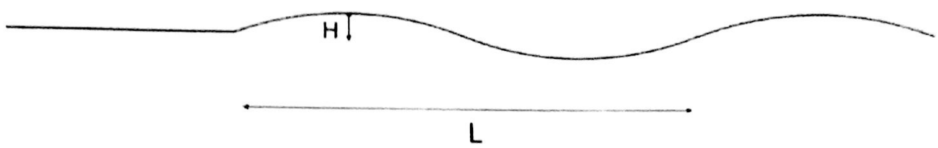
الف) با فرض هموار بودن مسیر حرکت خودرو، معادلات حرکت مربوط به جرم m_w و m_c را در راستای عمودی بنویسید.(از جرم فنر ها و میرا کننده ها صرف نظر کنید.)

اکنون فرض کنید که بدلیل بزرگ بودن نسبی مقادیر b_t و k_t در برابر b_s و k_s، از نیرو های وارده بر جرم m_w توسط فنر و میراکننده بالایی صرف نظر می کنیم.

ب- با فرض فوق، معادله مربوط به $x_1(t)$, $x_2(t)$ را در حالت کلی بدست آورید.

- در بخش های بعدی مساله فرض فوق معتبر نمی باشد

حال مطابق شکل زیر فرض کنید که چرخ به یک ناهمواری نوسانی می رسد.



معادله ارتفاع این ناهمواری به صورت زیر داده می شود.

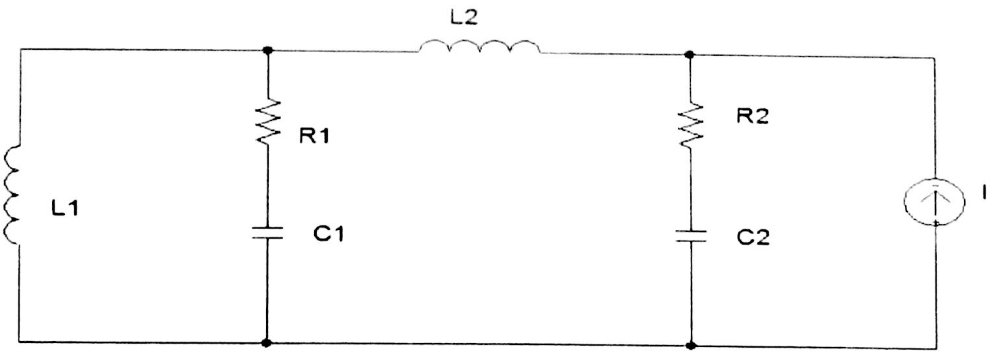
$$w = H \sin\frac{2\pi}{L} z$$

که در معادله فوق z نشان دهنده جابجایی در سطح افقی و H و L دو ثابت مثبت می باشند.

پ- با فرض آنکه سرعت افقی چرخ برابر مقدار ثابت V_0 باشد، معادلات حرکت مربوط به جرم m_w و m_c در راستای عمودی را بازنویسی کنید.

اکنون فرض کنید که چرخ پس از طی مصافت $1.5L$ مجددا بر روی یک سطح افقی به حرکت خود ادامه می دهد.حال با فرض آنکه هر دو جرم پیش از رسیدن به ناهمواری در حالت سکون قرار داشته اند می خواهیم حرکت سرنشین خودرو را بررسی کنیم.

از آنجا که حل معادلات قسمت پ کاری دشوار است. می خواهیم از مدار زیر به عنوان یک کمک در تعیین حرکت سرنشین استفاده کنیم.



در مدار فوق معادله مربوط به منبع جریان به صورت زیر داده می شود.

$$0 \leq t \leq T_0 \ => \quad I = I_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$t > T_0 \ => \quad I = 0$$

در واقع بعد از گذشت زمان T_0 منبع جریان I از مدار خارج می گردد و سیم مربوط به آن قطع می شود.

ت- با کمک اطلاعات عددی داده شده و همچنین نمودارهای مربوط به جریان های عبوری از القاگر ۱ و همچنین بار جمع شده بر روی هر دو خازن ، نمودار مربوط به سرعت و جابجایی سرنشین را بر حسب زمان رسم کنید.

- بار اولیه بر روی خازن ها و همچنین جریان اولیه عبوری از ۲ القاگر را برابر با صفر در نظر بگیرید.

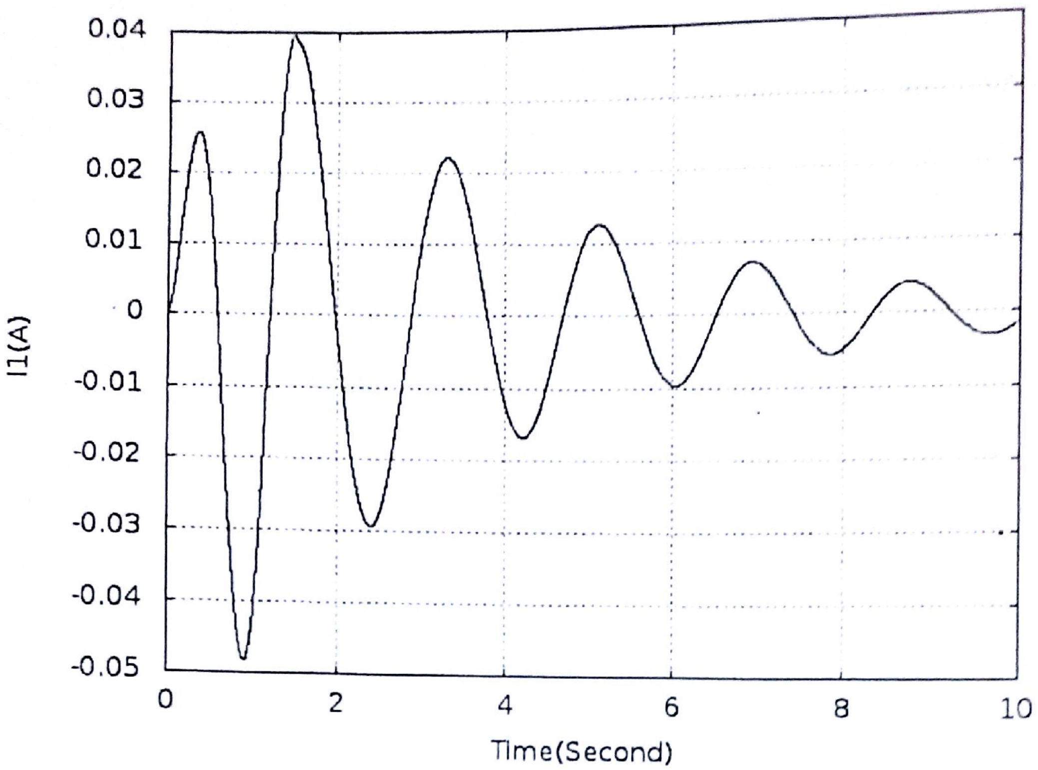
- مقادیر عددی مربوط به خودرو

m_c	$470\ Kg$
m_w	$50\ Kg$
K_s	$5700\frac{N}{m}$
K_t	$135000\frac{N}{M}$
b_s	$290\frac{Kg}{s}$
b_t	$1400\frac{Kg}{s}$
H	$50\ cm$
L	$20\ m$
V_0	$20\ \frac{m}{s}$

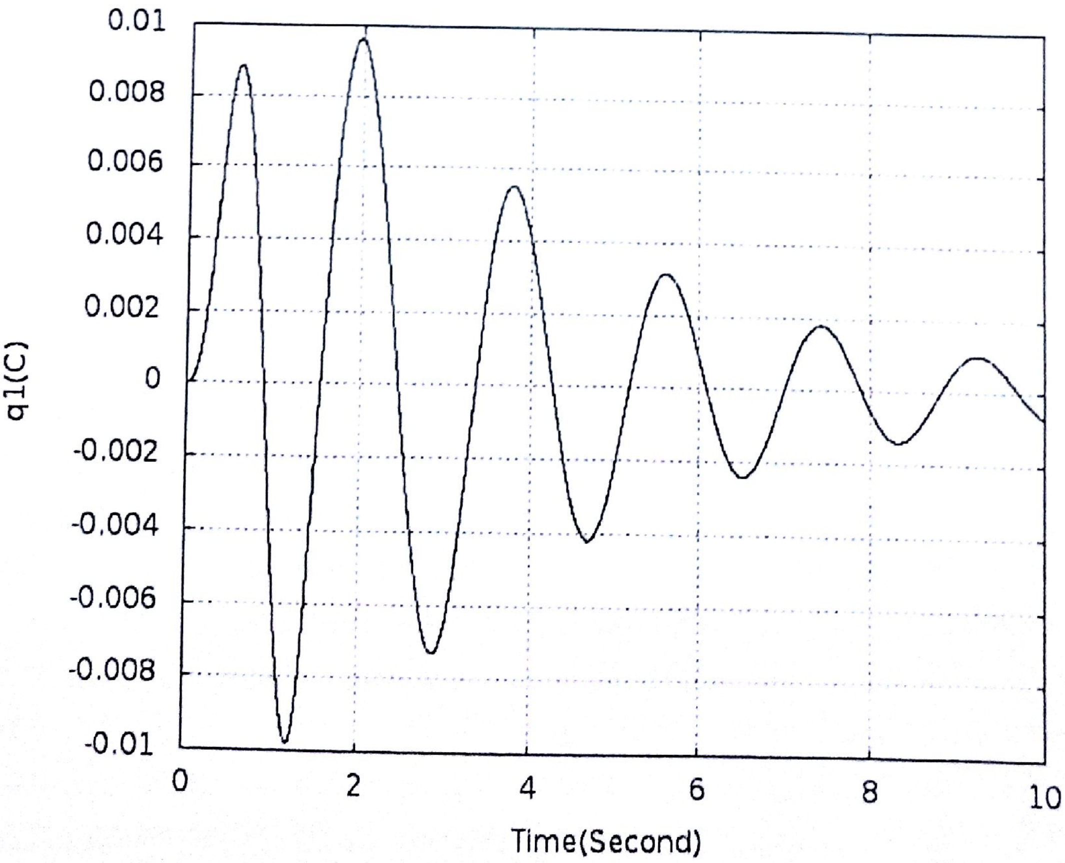
- مقادیر عددی مربوط به مدار

R_1	$6.17\ ohm$
R_2	29.8 ohm
L_1	$10\ H$
L_2	$1.06\ H$
C_1	$8.25 \times 10^{-3} F$
C_2	3.48×10^{-4} F
I_0	$6.69\ \times 10^{-2}\ A$
ω_0	$6.28\ HZ$
T_0	$1.5\ s$

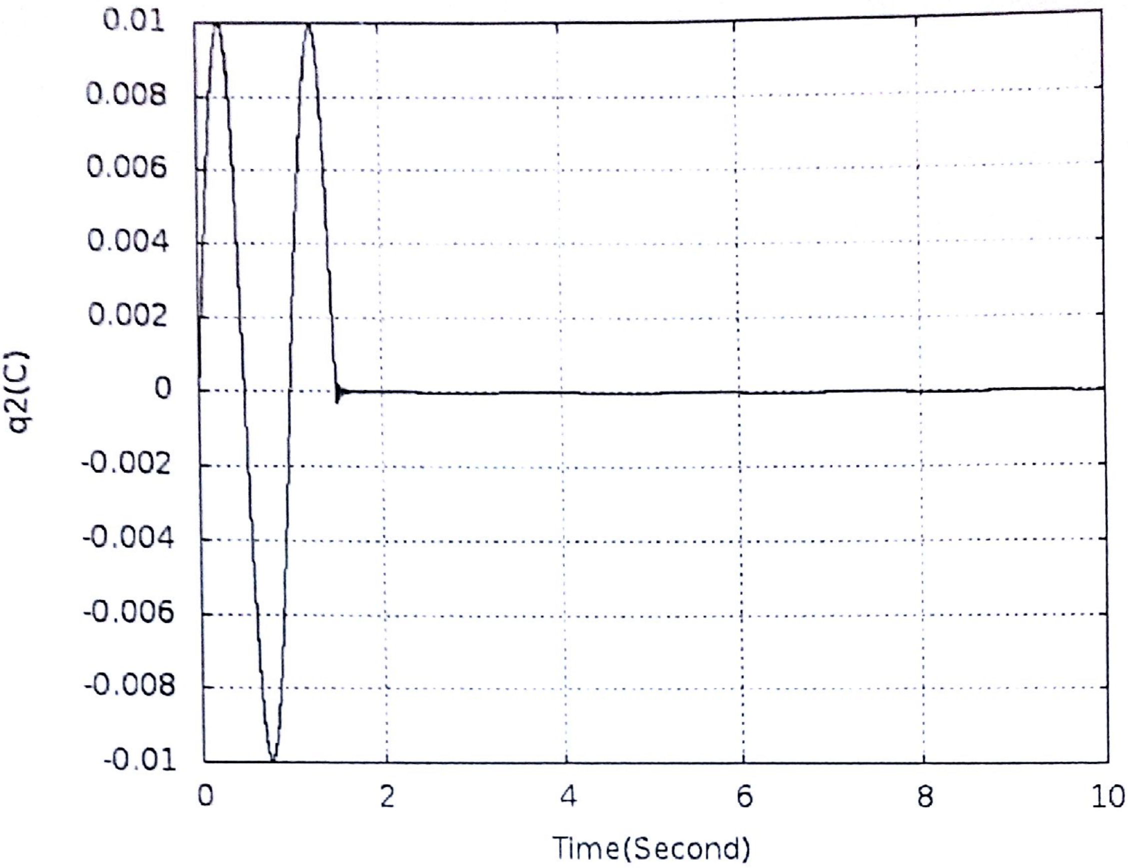
• جریان عبوری از القاگر ۱



• بار جمع شده بر روی خازن ۱



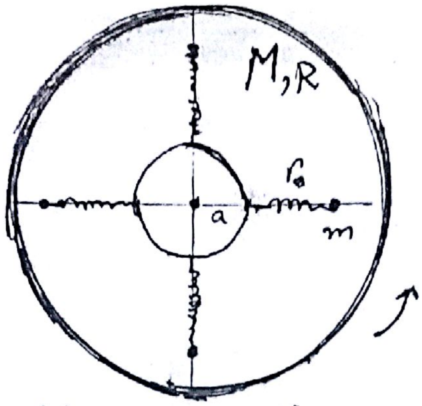
- بار جمع شده بر روی خازن ۲



مسئله‌ی ۳)

یک پوسته‌ی کروی رسانا به شعاع a و جرم m در نظر بگیرید که بر سطح مایعی نارسانا با چگالی جرمی و ثابت دی الکتریک نامشخص قرار داده شده است. در ابتدا پوسته‌ی رسانا بدون بار است و مرکز آن در ارتفاع d از سطح مایع در حال تعادل قرار می‌گیرد. سپس پتانسیل الکتریکی پوسته‌ی رسانا طوری تنظیم می‌شود که مرکز کره هم ارتفاع با سطح مایع شود. در این حالت پتانسیل الکتریکی پوسته‌ی رسانا برابر با V_0 است. ثابت دی الکتریک ماده‌ی نارسانا، k، را به دست آورید.

گرده‌ای یکنواخت به جرم M و شعاع R در ابتدا با سرعت زاویه‌ای ω_0 حول محور تقارن خود می‌چرخد. چهار جرم نقطه‌ای m مطابق شکل در ابتدا در فاصله r_0 از مرکز گرده قرار دارند و همراه آن می‌چرخند. چهار فنر مشابه که جرم و طول آنها ناچیز است جرمهای یاد شده را به محیط دایره‌ای به شعاع a ($a<r_0$) بسته‌اند.



الف) فرض کنید بر اثر اصطکاک فنرها به آرامی جمع شوند و نهایتا جرمها به محیط دایره به شعاع a بچسبند. سرعت زاویه‌ای دستگاه را در این حالت برحسب پارامترهای داده شده به دست آورید. جواب را برای M=4m ، R=4a و r=3a ساده کنید.

ب) در این فرایند چقدر انرژی تلف شده است؟ جواب را برای M=4m ، R=4a و r=3a ساده کنید.

ج) حال فرض کنید نقطه اتصال فنرها به دایره به شعاع a حلقه‌ای سبک و بدون اصطکاک باشد، طوری که امتداد فنرها همواره شعاعی بماند. همچنین فرض کنید جرمهای m با گرده نیروی اصطکاک متناسب با سرعت نسبی ($f=-bv$) داشته باشند. معادلات حرکت دستگاه را برای r، θ و ω بنویسید که r و θ مختصات قطبی یکی از جرمها نسبت به گرده و ω سرعت زاویه‌ای گرده نسبت به ناظر لخت است.

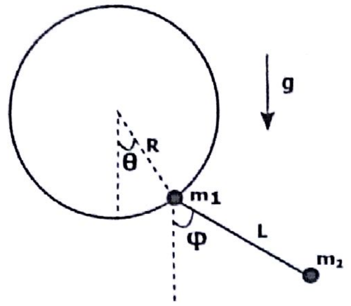
د) اگر r_0، ω_0 و $\theta_0=0$ حل بدیهی دستگاه باشد. اختلال $r=r_0+\xi$ ، $\omega=\omega_0+\beta$ و $\dot{\theta}=\Omega$ را در نظر بگیرید و معادلات خطی شده برای اختلال‌ها را به دست آورید. با فرض آن‌که اختلال کوچک ξ_0 و Ω_0 در ابتدا به هر چهار جرم داده شده باشد حل مسئله را برای اختلال فوق پیدا کنید.

بسمه تعالی

۹۴/۲/۱۹ آزمون چهارم المپیاد فیزیک (دوره‌ی ۱۰ نفر)

وقت: ۴ ساعت

مسئله‌ی ۱)



شکل ۱: چیدمان

مطابق شکل، حلقه‌ای به شعاع R ثابت شده است و هیچ گونه حرکت و چرخشی نمی‌تواند داشته باشد. جسمی به جرم m_1 بدون اصطکاک بر روی حلقه حرکت می‌کند. زاویه‌ی θ از خط عمود سنجیده می‌شود و مکان آن را مشخص می‌کند. جرم m_2 توسط میله‌ی بدون جرمی به طول L به جرم m_1 وصل شده است. زاویه‌ی ϕ انحراف این جرم از خط عمود را نشان می‌دهد. شتاب گرانش g است.

الف) قانون دوم نیوتون را برای جرم‌های m_1 و m_2 بنویسید. توجه کنید که مساله دو بُعدی است. (۲ نمره)

ب) معادلات دیفرانسیل جفت‌شده‌ای برای متغیرهای θ و ϕ بر حسب ثوابت مساله بنویسید. (۲ نمره)

از این پس پاسخ‌ها را تنها بر حسب کمیت‌های زیر بنویسید:

$$\Omega^2 := \frac{g}{R}, \qquad \alpha := \frac{L}{R}, \qquad \beta := \frac{m_2}{m_1} \tag{1}$$

ج) مُدهای نوسانی برای نوسان‌های کوچک در نزدیکی $\theta = 0$ را مشخص کنید. برای این کار باید فرکانس مُد و نسبت دامنه‌ی نوسان برای دو متغیر را مشخص کنید. (۳ نمره)

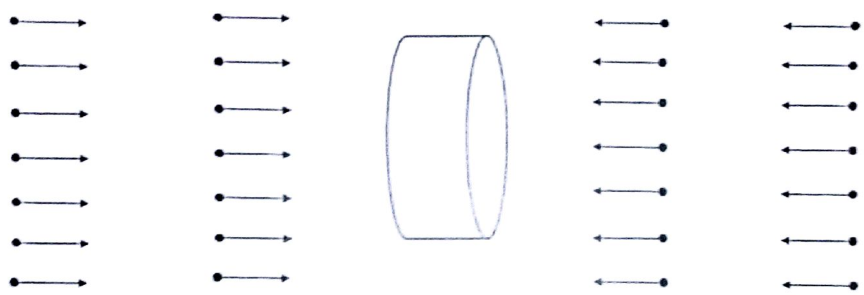
د) مُدهای نوسانی برای نوسان‌های کوچک در نزدیکی $\theta = \pi$ را مشخص کنید. برای این کار باید فرکانس مُد و نسبت دامنه‌ی نوسان برای دو متغیر را مشخص کنید. (۳ نمره)

مسئله ۲)

اصطکاک فوتونی

فرض کنید که در ناحیه ای از فضا تابش فوتونی در جهت $+x$ و $-x$ داشته باشیم. تابش نسبت به ناظر S همسانگرد و همگن است. به عبارت دیگر تعداد فوتون ها در واحد حجم در تمام فضا ثابت است. همچنین هر مقطع فرضی را که در نظر بگیرید تعداد فوتون هایی که از سمت راست به چپ از سطح رد می شوند با تعداد فوتون هایی که در همین زمان از سمت چپ به راست رد می شوند، برابر می باشند.

حال یک دیسک با سطح مقطع A و جرم سکون m_0 را در این فضا در نظر بگیرید.



ابتدا فرض کنید که فوتون هایی که به دیسک برخورد می کنند کاملاً جذب آن می شوند. اگر دیسک نسبت به ناظر S ساکن باشد، هر سمت آن انرژی λ را در واحد زمان از فوتون ها دریافت می کند. حال فرض کنید که دیسک با سرعت اولیه v_0 (نسبت به S) در این فضا شروع به حرکت کند.

الف) پس از گذشت زمان t سرعت دیسک $v(t)$ می باشد. آهنگ تغییر تکانه دیسک نسبت به ناظر S، $\frac{dp}{dt}$، در این لحظه بر حسب $v(t)$ ، λ و سرعت نور چه مقدار است؟

ب) سرعت و مکان دیسک را به صورت تابعی از زمان بدست آورید.

ج) سرعت و جابجایی حدی $(t \to \infty)$ دیسک را بدست آورید.

حال فرض کنید که دیسک تابش می کند. تابش دیسک به گونه ای است که فوتونی که به سطح آن می رسد با همان انرژی نسبت به ناظر همراه دیسک برمی گردد.

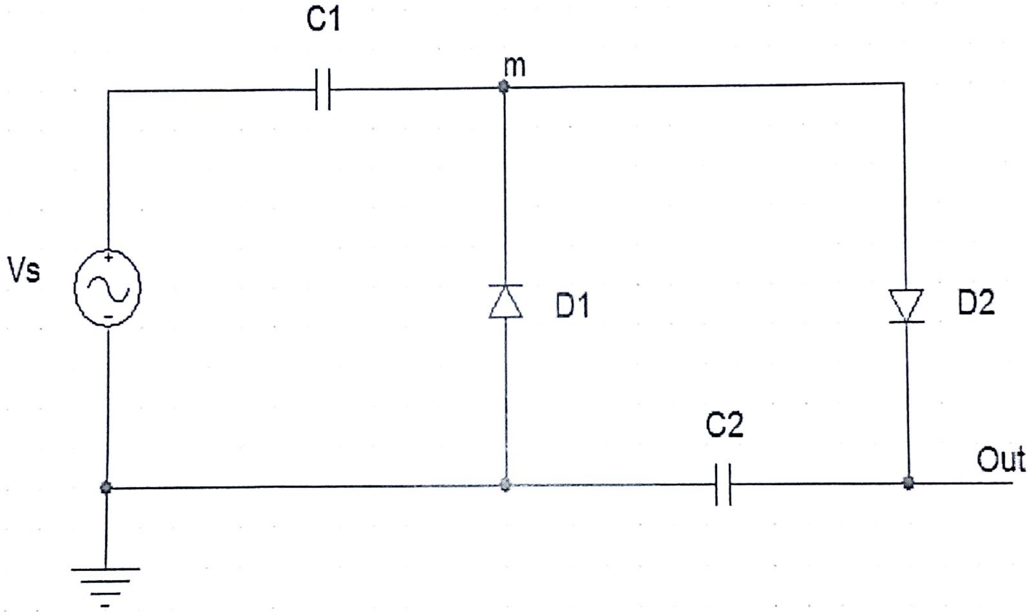
ه) توان تابشی سطوح راست و چپ دیسک نسبت به ناظر S را به صورت تابعی از سرعت دیسک، λ و سرعت نور بدست آورید.

و) آهنگ تغییر تکانه دیسک نسبت به ناظر S ، $\frac{dp}{dt}$، را به صورت تابعی از سرعت دیسک، λ و سرعت نور بدست آورید.

ی) سرعت و جابجایی حدی دیسک را بدست آورید.

سوال ۳۷)

در مدار شکل زیر دیود های D_1 و D_2 ایده‌آل هستند و دو خازن مشابه هستند. منبع ولتاژ، ولتاژ متناوب $Vs = \varepsilon \sin \omega t$ را تولید می‌کند. در لحظه‌ی $t = 0$، خازن‌ها بدون بارند. نمودار ولتاژ منبع به ازای $\frac{\omega}{2\pi} = 500Hz$ و $\varepsilon = 20\ V$ در بازه‌ی زمانی $0 < t < 20ms$ در صفحه‌ی بعد رسم شده است. به ازای همین مقادیر، ولتاژ نقطه‌ی m بر حسب زمان، ولتاژ دو سر خازن C_1 بر حسب زمان و ولتاژ گره خروجی (Out) بر حسب زمان را در نمودارهای صفحات بعد به دقت رسم کنید. همچنین به اختصار توضیح دهید که پس از گذشت زمان طولانی، ولتاژ هر یک از گره‌های m و Out به چه صورت در خواهد آمد؟



ــــــ مسئله ۴)

سیستمی با ظرفیت گرمایی منفی

(اطلاعات عددی در انتهای سؤال آمده است.)

سیاه‌چاله ناحیه‌ای از فضا است که به دلیل تراکم جرم در آن هیچ جسمی حتی نور نمی‌تواند از میدان گرانشی آن خارج شود؛ به همین دلیل در نگاه کلاسیکی، سطح سیاه‌چاله سیاه است. مشخصات یک سیاه‌چاله‌ی ساکن بدون بار الکتریکی، تنها با دانستن جرم آن، M، تعیین می‌شود.

الف) با توجه به مفهوم سرعت فرار از میدان گرانشی کره‌ای به جرم M، شعاع یک سیاه‌چاله‌ی کروی به جرم M را بیابید(r_H).

ب) سطح سیاه چاله را "افق" می‌نامند. مقدار عددی شعاع افق سیاه‌چاله‌ای با جرم زمین را حساب کنید. (توجه کنید که زمین یک سیاه‌چاله نیست.)

در سال ۱۹۷۳، "بکن اشتاین" پیشنهاد داد که آنتروپی یک سیاه چاله با جرم M فقط به مساحت سطح آن بستگی دارد و با رابطه‌ی $S = \frac{A}{4\ell_p^2}K_B$ داده می‌شود که در آن $\ell_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}$ طول پلانک، و K_B ثابت بولتزمان است. A مساحت سطح افق است.

پ) آنتروپی سیاه چاله را برحسب جرم آن و ثابت‌های فیزیکی محاسبه کنید.

ت) مقدارهای عددی $\frac{A}{\ell_p^2}$ و S را برای سیاه‌چاله‌ای با جرم زمین حساب کنید.

در سال ۱۹۷۴، "استفان هاوکینگ" نشان داده که با در نظر گرفتن مکانیک کوانتومی، سیاه‌چاله دیگر کاملاً سیاه نخواهد بود، بلکه مانند جسمی در دمایT تابش می‌کند. با تابش، از جرم سیاه چاله کاسته می‌شود. فرض کنید تابش سیاه‌چاله که از سطح افق آن خارج می‌شود در محیطی به حجم V اطراف سیاه‌چاله وارد می‌شود. می‌خواهیم شرط تعادل گرمایی بین سیاه‌چاله و تابش اطراف آن را بررسی کنیم. می‌دانیم انرژی یک سیاه‌چاله فقط برابر انرژی سکون نسبیتی آن و انرژی "تابش گرمایی" در دمای T و حجم V برابر با $\frac{4\sigma}{c}VT^4$ است که در آن σ ثابت استفان است. همچنین فرض کنید معادله‌ی حالت تابش گرمایی به صورت $PV = U/3$ باشد که در آن U انرژی و P فشار تابش است.

ث) آنتروپی کل سیستم "سیاه‌چاله + تابش" را حساب کرده و دمای تعادل این مجموعه را مشخص کنید. این دما را دمای هاوکینگِ سیاه‌چاله می‌نامند(T_H).

ج) مقدار عددی دمای هاوکینگ سیاه‌چاله‌ای با جرم کره زمین را حساب کنید.

چ) با اعمال شرط تعادل پایدار، حدود حجم V را برحسب M و ثابت‌های فیزیکی بیابید.

ح) رابطه‌ی ظرفیت گرمایی سیاه‌چاله‌ای به جرم M را به دست آورید.

خ) فرض کنید سیاه چاله‌ای با جرم M و دمای T_H در محیط بی‌نهایت قرار گرفته (یعنی تابش محدود به حجم V نباشد) و با محیط در تعادلی ناپایدار است. اگر در اثر یک افت‌وخیز گرمایی مقداری از جرم سیاه‌چاله کاسته شود تعادل به چه سمتی پیش می‌رود؟ سیاه‌چاله در نهایت به چه حالتی می‌رسد؟

د) فرض کنید سیاه‌چاله بدون جذب، فقط تابش کند. برای تخمین یک حدّ بالا برای طول عمر یک سیاه‌چاله فرض کنید سیاه چاله مانند "جسم سیاه" تابش کند. با استفاده از قانون تابش استفان، حد بالایی عددی برای طول عمر سیاه‌چاله‌ای با جرم زمین را پیدا کنید.

(برطبق قانون استفان، آهنگ زمانی تابش از واحد سطح جسمی سیاه با دمای T برابر با σT^4 است)

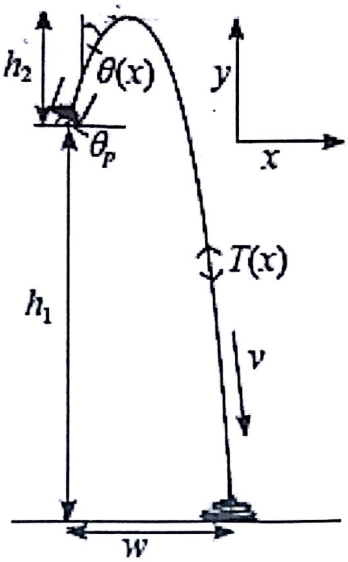
اطلاعات عددی:

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \quad (Nm^2)/Kg^2$$
$$\hbar = h/(2\pi), \quad h = 6.63 \times 10^{-34} \quad Js$$
$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \quad W/(m^2k^4)$$
$$C = 3 \times 10^{8} \quad m/s$$
$$M_{Earth} = 6 \times 10^{24} \quad kg$$
$$K_B = 1.38 \times 10^{-23} \quad J/K$$

۹۴/۲/۲۰
مدت امتحان: ۵ ساعت

بسمه تعالی
امتحان نهایی المپیاد فیزیک (دوره‌ی ۱۰ نفر)

مسئله‌ی ۱)



شکل ۱: زنجیر

در تابستان آزمایشی با زنجیر انجام دادیم و مشاهده کردیم که زنجیر می‌پرد. در اینجا می‌خواهیم کمی اطلاعات درباره‌ی آن به دست آوریم.

شکل ۱ را ببینید. ارتفاع زنجیری که از لیوان در حال خارج شدن است از سطح زمین h_1 است. h_2 بیشینه‌ی ارتفاع زنجیر است. زاویه‌ی مماس بر زنجیر با خط عمود را با $\theta(x)$ نشان می‌دهیم. زاویه‌ی زنجیر در لحظه‌ی نخست را با θ_p نشان می‌دهیم. کشش در طناب را تنها وابسته به x می‌گیریم و آن را با $T(x)$ نشان می‌دهیم. شکل زنجیر ثابت است و فرض می‌کنیم که میزان زیادی زنجیر در لیوان موجود است و دائم به بیرون می‌ریزد. سرعت زنجیر، v، نیز ثابت است. بُرد زنجیر، یعنی فاصله‌ی افقی نقطه‌ای که به زمین می‌خورد را با w نشان می‌دهیم. جرم بر واحد طول زنجیر λ و شتاب گرانش g است.

در ادامه، مقصود از ثوابت مساله کمیت‌های h_1، θ_p، λ و g است.

توجه کنید که مبدا دستگاه مختصات همان نقطه‌ی شروع حرکت زنجیر است. برای شلوغ نشدن شکل در جایی دیگر آمده است.

الف) بخش کوچکی از زنجیر در مکان $x, y(x)$ را در نظر بگیرید. قانون دوم نیوتون را در راستای مماس بر زنجیر بنویسید. از آنجا $T(x)$ را بر حسب $y(x)$ و ثوابت مساله بیابید. شما باید تابع $f(y)$ را تنها بر حسب ثوابت و y

بیابید. A ثابت انتگرال‌گیری است و نیازی به تعیین آن در اینجا نیست. پاسخ را این چنین بنویسید:

$$T(x) = f(y) + A \tag{۱}$$

ب) فرض کنید شعاع انحنا در مکان $(x, y(x))$ برابر با $R(x)$ است. $T(x)$ را بر حسب ثوابت مسئله، $R(x)$، v و $\theta(x)$ بنویسید.

ثابت A که در بخش الف) ظاهر شد را از این پس برای سادگی به شکل $A = \lambda(v^2 - cg)$ بگیرید که در آن c ثابتی است که در ادامه تعیین خواهد شد.

ج) برای یک خم دو بُعدی شعاع انحنا چنین است:

$$R(x) = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|} \tag{۲}$$

با استفاده از این اطلاعات و بخش‌های قبل یک معادله‌ی دیفرانسیل برای $y(x)$ بنویسد.

پاسخی چون

$$y(x) = -a\cosh(\frac{x-b}{a}) + c \tag{۳}$$

که در آن a و b کمیت‌هایی مثبت هستند، برای معادله دیفرانسیل بگیرد.

توجه کنید که این بخش نمره ندارد. تنها برای تطمئن القلوب است! بررسی کنید که پاسخ داده شده در معادله‌ی دیفرانسیل صدق می‌کند. لازم نیست این را در پاسخنامه بنویسید. اما اوصیکم به انجامش!

خروج از لیوان و برخورد با زمین بخش‌های مهمی هستند که هنوز مدل خوبی برای‌شان ارائه نشده است. اما با توجه به تحلیل ابعادی و فیزیک مساله می‌توان دو ثابت جدید تعریف کرد و مساله را برحسب آنها حل کرد. در نهایت این ثوابت به

عنوان کمیت‌های آزاد برای انطباق مدل و آزمایش به کار خواهند رفت. پس تعریف می‌کنیم:

$$T(\text{۰}) = (\text{۱} - \alpha)\lambda v^{\text{۲}},$$
$$T(w) = \beta\lambda v^{\text{۲}}. \qquad (\text{۴})$$

که در آن α و β ثوابتی مثبت هستند.

د) با استفاده از اطلاعات داده شده، کمیت‌های a، b، c، w، v و $h_{\text{۲}}$ را بر حسب ثوابت مساله، α و β به دست آورید. راهنمایی:

$$\cosh^{\text{۲}} a - \sinh^{\text{۲}} a = \text{۱}$$
$$\cosh(a+b) = \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b$$
$$\sinh(a+b) = \cosh a \sinh b + \cosh b \sinh a \qquad (\text{۵})$$

ه) برای آزمایشی خاص مقادیر $\alpha = \text{۰,۱۲}$ و $\beta = \text{۰,۱۱}$ را به دست آورده‌ایم. اگر این زنجیر را از پشتِ بامِ ساختمان اصلی باشگاه به زمین بریزیم، با فرض اینکه رنجیز با $\theta_p = \text{۰}$ از ظرف خارج شود، ارتفاع اوج زنجیر چه قدر می‌شود؟

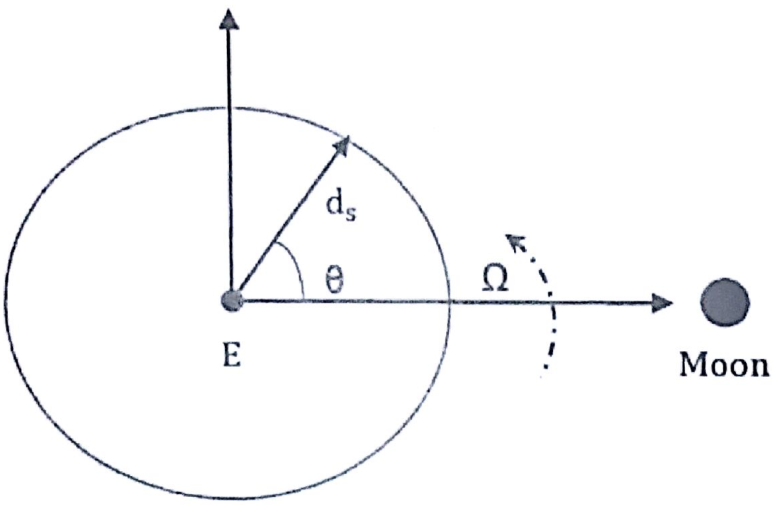
در این مساله می خواهیم یک مدل ساده برای بررسی اثر گرانشی ماه بر ماهواره هایی که به دور زمین حرکت می کنند ارائه دهیم.

- در تمامی قسمت های مساله تنها نیروی موثر را برهمکنش های گرانشی در نظر بگیرید. همچنین زمین، ماه و ماهوراه را اجرامی نقطه ای فرض می کنیم.

ماهواره ای با جرم 800 Kg و دوره تناوب 20.0 ساعت که در مداری دایروی به دور مرکز زمین حرکت می کند را در نظر بگیرید.

الف- با فرض آنکه در ابتدا تنها نیروی موثر وارد بر ماهواره را نیروی گرانشی زمین در نظر بگیریم، فاصله ماهواره تا زمین (d_s) را بدست آورید. (اعداد مورد نیاز در انتهای سوال داده شده اند.)

اکنون مطابق شکل زیر ماه را در نظر بگیرید که در صفحه ای منطبق بر صفحه ی مداری ماهواره و در مداری دایروی با شعاع d_m ($d_m \gg d_s$) و سرعت زاویه ای ثابت Ω، هم جهت با ماهواره به دور مرکز زمین حرکت می کند.



حال دستگاه مختصاتی به مرکزیت زمین و چرخان با بردار سرعت زاویه ای $\vec{\Omega}$ در نظر بگیرید. به گونه ای که ماه از دید ناظرِ در این دستگاه هموراه ثابت است. بردار حامل ماهواره را در این دستگاه $\vec{r_s} = (r_s, \theta)$ می نامیم. مطابق شکل مبدا اندازه گیری θ را راستای زمین-ماه در نظر بگیرید.

ب- انرژی پتانسیل گرانشی ماهواره را برحسب مختصاتِ (r_s, θ) و سایر ثوابت مساله بدست آورید.(جرم ماه را مقدار مشخص M_m بنامید.)

عبارت خود را تا اولین مرتبه نسبت به $\left(\frac{d_s}{d_m}\right)$ بسط دهید و نشان دهید که انرژی پتانسیل را می توان به صورت زیر نوشت.

$$\phi(r_s, \theta) = \phi_0(r_s) + \left(\frac{d_s}{d_m}\right)\phi_1(r_s, \theta)$$

که در عبارت فوق ϕ_0 و ϕ_1 توابعی هستند که باید تعیین کنید.

ب- معادلات حرکت ماهواره در دستگاه چرخان را نوشته و با کمک آن، اندازه بردار حامل ماهواره در این دستگاه بر حسب زمان ،$r_s(t)$، را تا اولین مرتبه غیر صفر $(\frac{d_s}{d_m})$ بدست آورید.

- مقادیر اولیه r_s و θ را به ترتیب d_s و صفر در نظر بگیرید.

ت- میانگین عددی فاصله ماهواره تا مرکز زمین را پس ازگذشت زمان بسیار طولانی بدست آورید.
میزان انحراف نسبیِ این مقدارِ میانگین از d_s چقدر است ؟

- راهنمایی : جواب کلی معادله دیفرانسیل $\ddot{x} + \omega^2 x = C + \alpha\cos\Omega t$ به صورت زیر داده می شود.

$$If\ \omega \neq \Omega \Rightarrow \quad x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) + \frac{\alpha\cos\Omega t}{\omega^2 - \Omega^2} + \frac{C}{\omega^2}$$

$$If\ \omega = \Omega \Rightarrow \quad x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) + \frac{\alpha t\sin\omega t}{2\omega} + \frac{C}{\omega^2}$$

ثوابت مورد نیاز

$G = 6.67 \times 10^{-11}\ m^3\ Kg^{-1}\ s^{-2}$

$M_{Earth} = 5.97 \times 10^{24} Kg$

$M_{moon} = 7.35 \times 10^{22} kg$

$\mathrm{d_m} = 384000\ km$

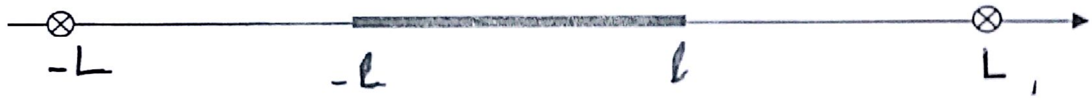
$Orbital\ Period\ of\ Moon\ Around\ The\ Earth = 27.3\ \mathrm{day}$

مسئله ۳۷)

ریسمانی به طول $2L$ بین نقاط ثابت $x=-L$ و $x=L$ روی محور x قرار دارد و تحت کشش ثابت F است. طول $2l$ از این ریسمان $(l<L)$ بین نقاط $x=-l$ و $x=l$ کشسانی خود را از دست داده و مثل یک میله صلب رفتار می کند. دستگاه ارتعاشات عرضی کم دامنه انجام می دهد به طوری که زاویه ریسمانها و میله با محور افقی همه جا کوچک است و معادله حاکم بر ریسمانها معادله موج است.

مدهای ارتعاشی دستگاه را به دست آورید. برای این کار معادله ای که برای عدد موجی k به دست می آید را به روش ترسیمی حل کنید.

توجه کنید که معادله حرکت و شرایط مرزی دستگاه تحت تبدیل $x \to -x$ متقارن است؛ بنا بر این مدهای دستگاه به دو دسته مجزای مدهای زوج و فرد تقسیم می شوند. ضمنا با دلیل معین کنید حالت کمترین انرژی دستگاه زوج است یا فرد.



مسئله‌ی ۲)

یک استوانه‌ی بسیار بلند دی‌الکتریک به شعاع a و طول L و ضریب گذردهی الکتریکی ϵ در نظر بگیرید. استوانه را در یک میدان الکتریکی خارجی از پیش یکنواخت E_0 که با محور استوانه زاویه‌ی θ می‌سازد، قرار می‌دهیم.

الف) تغییر انرژی الکتریکی مجموعه را نسبت به حالت عدم وجود استوانه به دست‌آورید. (راهنمایی: می توانید طول استوانه را برای محاسبه بی‌نهایت در نظر بگیرید و با صرف نظر کردن از اثرات لبه، انرژی بر واحد طول آن را محاسبه کنید.)

ب) مؤلفه‌ی دو قطبی الکتریکی کل استوانه در راستای میدان الکتریکی اولیه را بیابید.

پ) لختی دورانی استوانه را برابر با I فرض کنید. نقطه‌ی مرکز استوانه را ثابت در نظر بگیرید طوری که استوانه بتواند آزادانه حول این نقطه دوران کند. برای دو حالت $\frac{\epsilon}{\epsilon_0} > 1$ و $\frac{\epsilon}{\epsilon_0} < 1$ وضعیت تعادل پایدار استوانه را مشخص کنید و فرکانس نوسانات کوچک حول وضعیت تعادل را به دست آورید.

پ) استوانه را در دمای T و در میدان الکتریکی خارجی از پیش یکنواخت E_0 قرار می‌دهیم. عبارتی برای متوسط آماری دو قطبی الکتریکی این استوانه در دو حد اندازه‌ی میدان الکتریکی بسیار بزرگ و اندازه‌ی میدان الکتریکی بسیار کوچک پیدا کنید.

راهنمایی پ-۱: احتمال آن که سیستم دارای انرژی پتانسیل U باشد، متناسب با $e^{-\frac{U}{k_BT}}$ است که در آن $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \frac{J}{K}$ ثابت بولتزمن است.

راهنمایی پ-۲: انتگرال زیر می‌تواند مفید باشد:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

مسئله‌ی ۵)

سرعت انتشار یک موج صوتی در آب با افزایش فاصله y از سطح آب تغییر می کند. سرعت صوت در آب بر حسب y را تابع معلوم و صعودی $v(y)$ در نظر بگیرید. برای پیدا کردن مسیر حرکت یک «پرتو صوت» در آب می‌توان مشابه مسئله‌ی متناظر برای نور، ضریب شکست $n(y) = \frac{v(0)}{v(y)}$ برای آب در نظر گرفت. سرعت صوت در هوا را نیز مقدار معلوم v_a در نظر بگیرید. پرتویی با زاویه‌ی θ_a نسبت به راستای عمود بر آب از هوا وارد آب می‌شود. صفحه‌ی انتشار موج را صفحه‌ی $x - y$ بگیرید که محور x موازی با سطح آب و محور y عمود بر سطح آب و به سمت پایین است و مبدأ مختصات نقطه‌ی ورود پرتو به آب است.

الف) معادله‌ی دیفرانسیلی برای مسیر حرکت پرتو صوت در مختصات دکارتی بیابید و شرط یا شرایط مرزی لازم برای حل معادله را مشخص کنید.

حال فرض کنید $v(y)$ به صورت $v_0(1 - \alpha y)^{-\frac{1}{2}}$ باشد که α مقدار ثابتی است.

ب) معادله‌ی مسیر حرکت پرتو را بیابید و شکل آن را رسم کنید.

پ) بیشترین فاصله‌ی پرتو از سطح آب، y_{max} را بیابید.

ت) در فاصله‌ی X از نقطه‌ی ورود به آب، پرتو مجدداً به سطح آب بر می‌گردد. X را به دست آورید.

ث) به ازای چه مقداری از θ_a، X بیشترین مقدار را دارد؟ مقدار بیشینه‌ی X چه قدر است؟

ج) از زمان ورود به آب چه قدر طول می‌کشد تا پرتو مجدداً به سطح آب برگردد؟

چ) فرض کنید یک منبع صوتی در کف دریاچه‌ای به عمق h قرار داشته باشد. گیرنده‌ای را واقع بر سطح دریاچه در نظر بگیرید. حداکثر فاصله‌ی افقی گیرنده از منبع چه قدر باشد تا صدای منبع برای گیرنده قابل آشکارسازی باشد؟ از امواج صوتی بازتابیده از سطح مایع و از کف دریاچه چشم پوشی کنید.