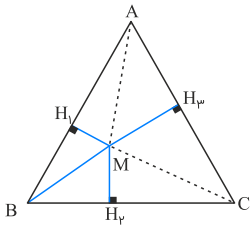


گزینه ۳

۱

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = 12\sqrt{3} \Rightarrow a = 4\sqrt{3} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2} a = 6$$



مجموع فاصله‌های هر نقطه درون مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع آن برابر با طول ارتفاع مثلث است، پس در صورتی که $MH_1 + MH_2 = 3$ باشد، آنگاه داریم:

$$\underbrace{MH_1 + MH_2}_3 + MH_3 = 6 \Rightarrow MH_3 = 6 - 3 = 3$$

گزینه ۳

۲

تعداد نقاط مرزی و درونی این چندضلعی شبکه‌ای به ترتیب $b = 18$ و $i = 3$ است. طبق فرمول پیک داریم:

$$S = \frac{b}{2} + i - 1 = \frac{18}{2} + 3 - 1 = 11$$

گزینه ۲

۳

می‌دانیم باتوجه به فرمول پیک، $S = \frac{b}{2} + i - 1$ که در آن تعداد نقاط مرزی b و تعداد نقاط درونی i است؛ پس:

$$b = 17, i = 1$$

$$S = \frac{17}{2} + 1 - 1 \Rightarrow S = 8/5$$

گزینه ۳

۴

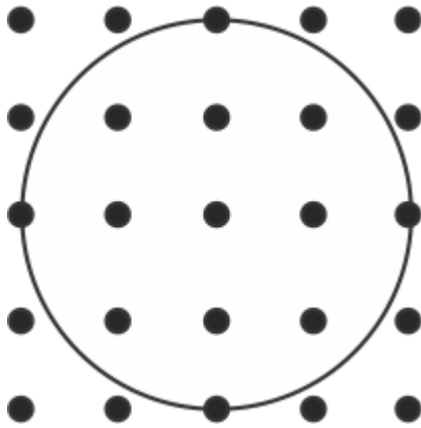
اگر S مساحت متوازی‌الاضلاع باشد:

$$S_{ADP} S_{APB} + S_{PDB} = \frac{1}{2} S = S_{APB} + S_{PDC} \Rightarrow 2 + S_{PDB} = 5 \Rightarrow S_{PDB} = 3$$

در حالتی که فاصله بین نقاط شبکه ۱ cm است، داریم:

$$b = 4, i = 1 \Rightarrow S = \frac{b}{2} + i - 1 = 2 + 1 - 1 = 2 \text{ cm}^2$$

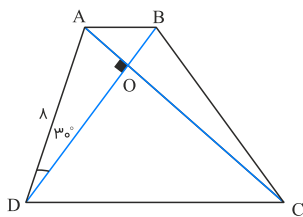
اگر فاصله بین نقطه‌های شبکه را نصف کنیم (شکل زیر) داریم:



$$S = \frac{4}{2} + 9 - 1 = 10 \left(\frac{1}{2} \text{ cm}\right)^2 = 2/5 \text{ cm}^2$$

$$\text{درصد افزایش} = \frac{2/5 - 2}{2} \times 100 = 25$$

در هر مثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبه‌رو به زاویه 30° ، نصف وتر است. داریم:



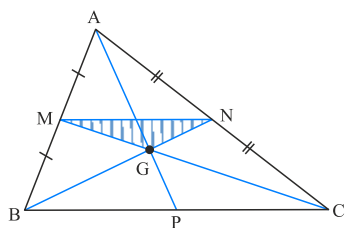
$$\begin{cases} AD = \lambda \\ \angle ADO = 30^\circ \end{cases} \Rightarrow AO = \lambda, DO = \lambda\sqrt{3} \Rightarrow S_{\triangle AOD} = \lambda\sqrt{3}$$

دو مثلث ADC و BDC دارای ارتفاع و قاعده یکسان هستند، بنابراین داریم:

$$S_{\triangle ADC} = S_{\triangle BCD} \Rightarrow S_{\triangle ADC} - S_{\triangle ODC} = S_{\triangle BCD} - S_{\triangle ODC}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle AOD} = S_{\triangle BOC} \Rightarrow S_{\triangle BOC} = \lambda\sqrt{3}$$

اگر نقطه تلاقی میانه‌های AP ، BN و CM از مثلث ABC را G (مرکز ثقل) در نظر بگیریم و از G به سه رأس مثلث وصل کنیم، آنگاه سه مثلث پدید آمده مساحت یکسانی خواهند داشت، یعنی:



$$S_{\triangle AGB} = S_{\triangle BGC} = S_{\triangle AGC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \quad (*)$$

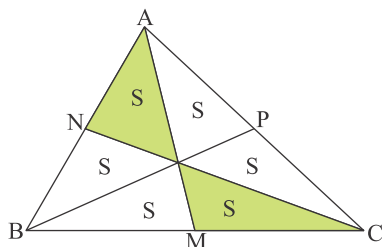
M و N به ترتیب وسط‌های AB و AC هستند. می‌دانیم که اگر وسط دو ضلع مثلث را به هم وصل کنیم، پاره‌خط حاصل، موازی ضلع سوم و طول آن نیز نصف طول ضلع سوم مثلث خواهد بود.

باتوجه به شکل $MN \parallel BC$ و $MN = \frac{1}{2} BC$ ، پس دو مثلث MGN و BGC باهم متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها برابر است با $k = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$. در نتیجه:

$$\frac{S_{\triangle MGN}}{S_{\triangle BGC}} = k^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{\triangle MGN} = \frac{1}{4} S_{\triangle BGC} \xrightarrow{(*)} \frac{1}{4} S_{\triangle BGC} = \frac{1}{12} S_{\triangle ABC}$$

پس مساحت مثلث ABC (بزرگ‌ترین مثلث در شکل)، ۱۲ برابر مساحت مثلث MGN است.

اگر سه میانه مثلث رسم شود، مثلث به ۶ مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌شود، پس درواقع مساحت ۲ قسمت از ۶ قسمت داده شده است.



$$2S = 12 \Rightarrow S = 6$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = 6S = 6 \times 6 = 36$$

اگر a طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و h_a طول ارتفاع این مثلث باشد، آنگاه داریم:

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \Rightarrow 3\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \Rightarrow a^2 = 12 \Rightarrow a = 2\sqrt{3}$$

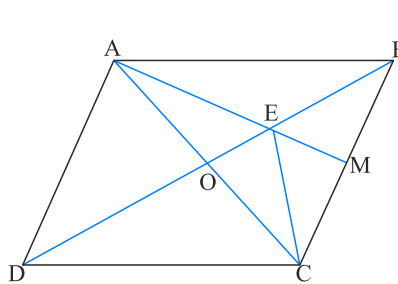
$$h_a = \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{3} = 3$$

مجموع فاصله‌های هر نقطه داخل یک مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع آن، برابر طول ارتفاع مثلث است؛ بنابراین در صورتی که فاصله نقطه M از ضلع BC را با x نمایش دهیم، داریم:

$$\frac{3}{2} + \frac{3}{4} + x = 3 \Rightarrow x = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

قطر AC را رسم می‌کنیم تا قطر BD را در نقطه O قطع نماید. در مثلث ABC، AM و BO میانه‌های نظیر اضلاع BC و AC هستند.

اگر نقاط C و E را به هم وصل کنیم، مساحت هریک از دو مثلث EOC و EMC، $\frac{1}{6}$ مساحت مثلث ABC است.



$$S_{\triangle EOC} = S_{\triangle EMC} = \frac{1}{6} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{12} S_{ABCD} = \frac{1}{12} \times 30 = 2/5$$

ازطرفی با رسم دو قطر یک متوازی‌الاضلاع، ۴ مثلث هم‌مساحت پدید می‌آید، بنابراین داریم:

$$S_{\triangle DOC} = \frac{1}{4} S_{ABCD} = \frac{1}{4} \times 30 = 7/5$$

$$\text{مساحت ناحیه هاشورخورده} = S_{\triangle DOC} + S_{\triangle EOC} + S_{\triangle EMC} = 7/5 + 2/5 + 2/5 = 12/5$$