هنـــدسه

این مقاله حاوی مطالب زیر است:
تاریخچه‌ی هندسه، هندسه در جهان اسلام، جایگاه هندسه در علوم، عصر ترجمه، هندسه و جبر، محاسبات هندسی، نظریه‌ی خطوط موازی

تاریخچه‌ی هندسه

در این مقاله تاریخچه‌ی هندسـه، بین سده‌های ۳-۹ ق/ ۹-۱۵ میلادی؛ یعنی آن زمان که مرکز بالندگی این فن در شرق و در میان دانشمندان عرب‌زبان بوده است، بررسی می‌کنیم.

هیچ سـند معتبری وجود ندارد که نخستین اندیشه‌های هندسی بشـر را به قوم خاصی مربوط کند. شاید بتوان گفت که این اندیشه‌ها نخستین دریافت‌های بشر از محیط اطراف خویش بوده است. توانایی تشخیص و مقایسه‌ی اَشکال هندسی، درک مفهوم مسافت و تخمین زمان لازم برای پیمودن مسافتی خاص را می‌توان نخستین یافته‌های انسان از داده‌های هندسی محیط اطرف خود دانست. نیاز به اندازه‌گیری زمین، انسـان را با اشکال سـاده و هندسی هم‌چون مستطیل، دایره و مثلث آشنا کرد و ساختن بناهای مختلف و نیاز به تقسیم‌بندی زمین و استفاده از سیستم‌های آبیاری، مفاهیمی هم‌چون خطوط موازی، عمود و متقاطع را به آن‌ها آموخت.

با توجه به گفته‌های هرودوت[1]، مورخ یونانی، هندسه در مصر تکوین یافته اسـت. «پاپیروس ریند[2]»، که متعلق به ۲۰۰۰ سـال پیش از میلاد اسـت، مجموعه‌ای اسـت از قوانین و فرمول‌هایی که نشان از پیشرفت مصریان در محاسبات هندسی دارد (دفاع[3]، ص ۸۳؛ رنان، ص ۳۸).

با توجه به اسـناد موجود شاید بتوان گفت که هندسه نیز در ذهن اسـتدلال‌گر یونانیان مدون شد. یونان کشوری متشکل از جزیره‌های بسـیار کوچک با اقلیمی خاص بـود و در آن زندگی بر پایه‌ی تجارت قرار داشت و هم‌چون دیگر سرزمین‌های آن روزگار حکومتی مرکزی بر آن حکم نمی‌راند و هر شهر، خود نماد دولت بود و دولت متشکل از عمـوم مردم. این نوع نظم اجتماعی نوع جدیدی از تفکر آفرید. آن‌ها بـا تکیه بر نیروی غیـر یونانیان (بردگان) و ثـروت روزافزون خود از دغدغه‌ی کار دنیا و خستگی‌های آن فارغ بودند؛ در نتیجه، به تفکر و تعمق در جهان اطراف خویش پرداختند (استرویک، ص ۴۶).

نخسـتین شکل از تفکرات قیاسـی و استفاده از روش برهانی در بیان مسـائل هندسـی را می‌توان در قضایایی که اثباتشان به تالس[4] منسـوب اسـت، یافت که این مطلب متعلق به سـده‌ی ششم پس از میلاد می‌شود (بال[5]، ص ۱۵؛ دفاع، ص ۸۳).

پس از آن بارزترین نشـانه‌ی تلاش بشـر برای ابداع فلسـفه‌ی ریاضـی را می‌تـوان در محاورات افلاطون مشـاهده کرد (هیث، ص ۱۶۴). افلاطون در پی آن اسـت که روح وحشـی ریاضیات را رام کند و آن را در چارچوب تعاریف و قضایایی که با تعاریف اثبات شدنی اند، درآورد. چنان که تاریخچه‌ی ریاضیات پیش از افلاطون و پس از او را مقایسه کنیم، می‌توانیم برتری نگاه قیاسی و استفاده از استدلال‌های

منطقی برای بیان قضایای ریاضی را دریابیم. این نگاه پس از افلاطون به صورت نگاه غالب به ریاضیات درآمد. تکوین اصول منطق و روشن ساختن چگونگی تعریف و استدلال‌های برهانی منوط به آن، به دست ارسطو، بزرگ‌ترین روشی بود که ریاضی‌دانان آن زمان را به ریاضیات اســتدلالی رهنمون ساخت. این نگاه جدید بیش از همه، راه خود را به هندسه باز کرد.

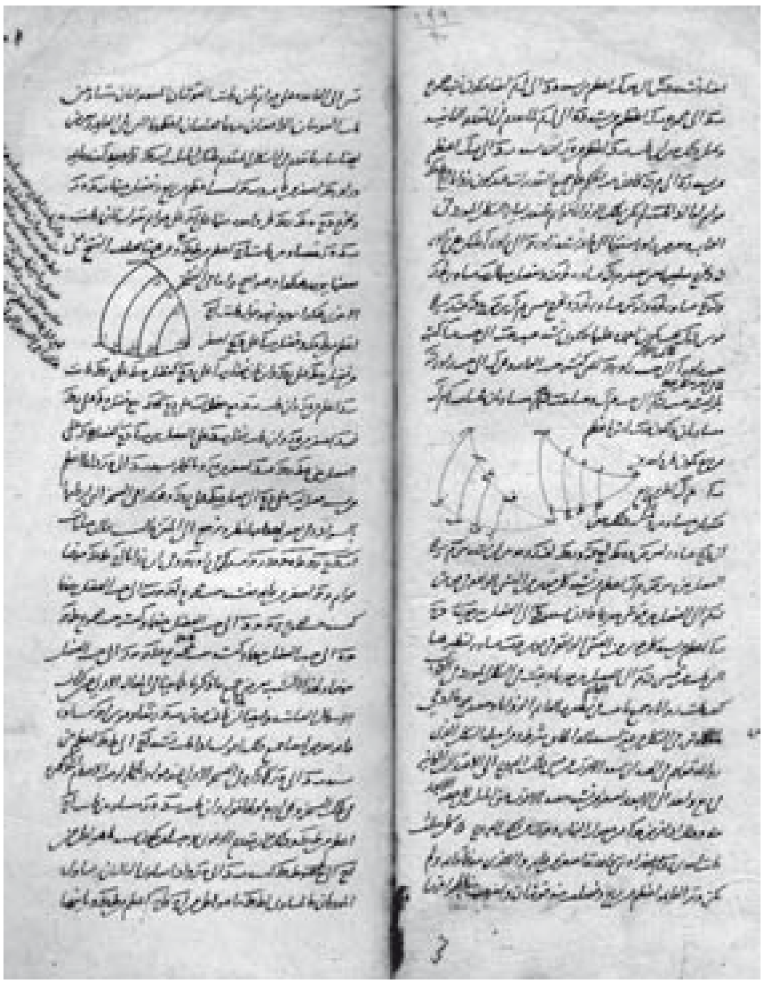
دنیای جدید هندســه، علاوه بر دســت‌یابی به روشی برای بیان قضایای خود، از موهبتی دیگر نیز سود برد و آن محیط سیاسی جدید حاکم بر دنیای آن زمان بود. اســکندر تمامی دنیای شــناخته شده‌ی آن زمان را تحت اســتیلای خود درآورده بود و جانشــینان او با احداث شــهرهای جدید در مراکز حســاس دنیای قدیم و ساخت محیط‌های علمــی بزرگ، فکر یونانــی را با اطلاعات آماری شــرقی پیوند زدند. بیــش از همه این امر در اســکندریه و کتاب‌خانه‌ی عظیم آن محقق شــد. تحقیق و تفحص در علوم یا به عبارتی دانشمند بودن، تبدیل به حرفه شد.

اقلیــدس، کســی که هندســه را با نام او می‌شناســیم نــه با نام افلاطون، و ارســطو در چنین محیطــی آثار بزرگ خود را خلق کردند. هم‌چون سایر علمای دنیای باستان از زندگی دقیق اقلیدس اطلاعات مبهمی در دســت اســت، این اطلاعاتِ مبهم، زمان زندگی او را بین سال‌های ۲۷۵ تا ۳۳۰ پس از میلاد گزارش می‌دهند (بال، ص ۵۲).

آثار فراوانی به او نســبت می‌دهنــد و در این میان، بزرگ‌ترین و ماندگارترین اثر او که طی ســالیان دراز بارها منتشر شده و در میانه‌ی قرون وســطی پس از «کتاب مقدس» پُرشمارگان‌ترین کتاب منتشر شده بود، کتابی است با نام« اصول[۶]» که با زبان تخصصی هندسی و مبتنی بر شیوه‌ی برهان به اثبات قضایای هندسی می‌پردازد. اقلیدس در ایــن اثر با اســتفاده از تعاریــف و اصول متعــارف و موضوعی که در ابتدای هر بخش گفته می‌شــود، به اثبات منطقی قضایا می‌پردازد (استرویک، ص ۶۳).

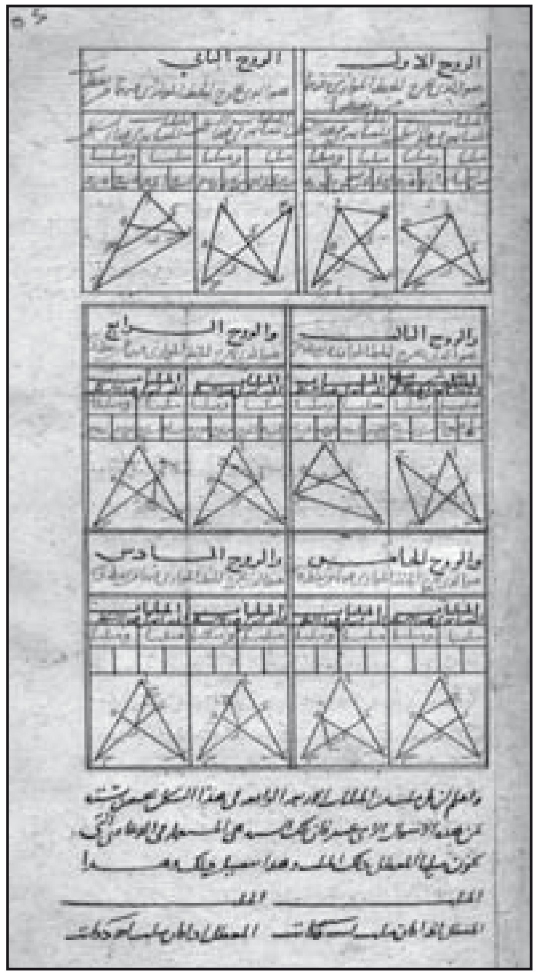
هندسه در جهان اسلام

هندســه واژه‌ای است که دانشــمندان عرب‌زبان آن را در مقابل واژه‌ی یونانی «geometry» انتخاب کردند. این واژه متشــکل از دو بخــش «geo» به معنای زمین و «meter» بــه معنای اندازه‌گیری



اســت (دفاع، ص ۸۲). اعراب در ترجمــه‌ی این واژه با در نظر گرفتن این موضوع، آن را به واژه‌ی پارســی «اندازه» برگرداندند (تهانوی، ج ۲، ص ۱۷۴۴) و از آن‌جا که در زبان عرب حرف «ز» پس از «د» واقع نمی‌شــود، قلب به «س» شده اســت (خوارزمی، ص ۲۱۷). خوارزمی اشــاره می‌کند که برخی این واژه را معرب اندیشه می‌دانند که درست نیست (همان‌جا).

هندســه در رده‌بندی علوم از علوم ریاضی به حســاب می‌آید و از آن با عنوان علم شناخت مقادیر و نسبت‌ها یاد می‌شود. فارابی هندسه را به دو بخش عملی و نظری تقســیم می‌کند. وی اضافه می‌کند که در هندســه‌ی عملی در باره‌ی خطوط و ســطوحی بحث می‌شــود که با آن‌ها ســروکار داریم و در هندســه‌ی نظــری مباحث کلی و مطلق مطرح می‌شود (فارابی، ص ۷۷). ابن‌سینا هندسه را علم شناخت وضع خطوط، اشکال، سطوح و نسبت‌ها می‌داند. وی این مقادیر را مشخص



کننده‌ی وضع اشـکال نسبت به یک‌دیگر می‌داند (ابن‌سینا، ص ۸۸). بیرونی (ص ۳) هندسـه را دانسـتن اندازه‌هـا و خاصیت صورت‌ها و شـکل‌ها که در جسم موجود اسـت، تعریف می‌کند. فخرالدین رازی (ص ۱۴۵) تقسـیم کمیت چیزها و اقسام آن‌ها، معرفت اشکال و زوایا را به هندسه تعبیر می‌کند.

در «درةالتـاج» ریاضیات جزو علوم حکمـی نظری؛ یعنی آن‌چه که مخالطت ماده شـرط وجود آن نباشـد، به حسـاب آمده و هندسه اول معرفت ریاضی نام گرفته اسـت و آن مشـتمل بر مقادیر و احکام لواحق اسـت (قطب‌الدین شـیرازی، ص ۷۳-۷۴). ابن خلدون هم در تقسیم‌بندی خود از علوم، هندسه را یکی از علوم تعلیمی می‌داند و آن را اندیشیدن در مقادیر، منفصل یا متصل، بر می‌شمارد (ابن خلدون، ج ۲، ص ۱۰۰). تهانوی از آن با عنوان علم شناخت مقادیر مطرح می‌کند (تهانوی، ج ۲، ص ۱۷۴۴). کپری‌زاده در «مفتاح السعادة» علم هندسه را علم شناخت مقادیر و ملحقاتشان می‌داند و هم‌چنین وضع و نسبت آن‌ها به یک‌دیگر. وی مقادیر مطلقه چون خط، سطح و جسم تعلیمی (حجم) را موضوع هندسه و زاویه، نقطه و شکل را ملحقات آن می‌داند (کپری‌زاده، ج ۱، ص ۳۴۷).

مسیر تکامل هندسه در عالم اسلام را به دو دوره می‌توان تقسیم کرد:
الف) عصر ترجمه و ورود در قرن سوم
ب) عصر خلاقیت؛ یعنی قرن چهارم به بعد (سویسی[۷]، ص ۴۱۱).

الف) عصر ترجمه

آثار هندسـی که از طریق ترجمه وارد زبان عربی شده‌اند، به سه گروه عمده تقسیم می‌شوند (یوشکویچ و روزنفلد[۸]، ص ۴۴۸).

۱- نوشته‌های نظری در هندسه

مهم‌ترین اثری کـه در این گروه قرار می‌گیرد، کتاب «اصول» اقلیدس اسـت. نخسـتین بار حجاج بن یوسـف این کتاب را ترجمه کـرد. حجاج دو ترجمه از کتاب «اصول» عرضه کرده که نخسـتین آن‌ها به هارونی[۹] و دیگری به مأمونی معروف شـده که دومی معتبر دانسته شده است. ترجمه‌ی حنین بن اسحاق را ثابت بن قره اصلاح کرده است. نیریزی هم شـرحی بر این کتاب نوشته است، هم‌چنین ابوعثمان دمشـقی و کرابیسی هم آن را ترجمه کرده‌اند. جوهری بر تمام کتاب شـرحی نوشته اسـت. علاوه بر آن، شرحی از ماهانی در بـاره‌ی مقاله‌ی پنجم، شـرحی از ابوجعفر خازن و شـرح ناتمامی از ابوالوفای بوزجانی هم نگاشـته شـده‌اند. کنـدی در «اغراض کتاب اقلیدس» در باره‌ی اقلیدس و علت نوشـته شـدن کتاب توضیحاتی داده و آن را مشتمل بر سیزده مقاله دانسته که ابسقلاوس[۱۰]، شاگرد اقلیدس، دو مقاله‌ی چهاردهم و پانزدهم را به آن افزوده اسـت (ابن ندیـم، ص ۳۲۵ - ۳۲۶).

کتاب دیگری که آن هم از آثار اقلیدس اسـت، «معطیات[۱۱]» نام دارد که اسـحاق بـن حنین آن را ترجمه کرده و ثابـت بن قره آن را اصلاح کرده است (سویسی، ص ۴۱۲).

«قطـوع مخروطـی[۱۲]» آپولونیـوس[۱۳] کتاب دیگری اسـت که ترجمه‌ی آن تأثیر مهمی در انتقال هندسه به عالم اسلام داشته است. بنوموسی این کتاب را مشتمل بر هشت مقاله معرفی کرده‌اند که هفت مقاله‌ی آن و بخشـی از مقاله‌ی هشـتم در دسترس آن‌ها بوده است. چهار مقاله‌ی نخست را هلال بن ابی هلال حمصی زیر نظر احمد بن موسـی ترجمه کرده است و سـه مقاله‌ی دیگر را ثابت بن قره ترجمه کرده است (ابن ندیم، ص ۳۲۶).

در ادامـه می‌توان از کتاب «اصول هندسـه[۱۴]»، «منلائوس[۱۵]» و کارهای پاپوس و هرون اسـکندرانی نام بـرد که در این دوران، یعنی عصر ترجمه، به جهان اسلام وارد شدند (سویسی، ص ۴۱۲).

از جمله آخرین کتاب‌هایی که از این گروه ترجمه شده‌اند، می‌توان به آثار هندسـی ارشمیدس اشاره کرد. کتاب‌هایی هم‌چون «در باره‌ی کره و اسـتوانه[۱۶]» که ثابت بن قره و اسحاق بن حنین ترجمه کردند، کتاب «در باره‌ی اندازه‌گیری دایره[۱۷]» که آن نیز به همت ثابت بن قره و حنین بن اسحاق ترجمه شد و این ترجمه در قرن هفت مورد بازبینی نصیرالدین طوسـی قرار گرفت، کتاب «لم[۱۸]» که آن نیز ترجمه‌ای از ثابت بن قره اسـت و هم‌چنین کتـاب «اندازه‌گیری ضلع هفت‌ضلعی

منتظم محاط در دایره[۱۹]» که الهام‌بخش کارهای ابوسهل کوهی بوده است (همان‌جا).

۲- کتاب‌هایی که به کاربرد هندسه در علوم دیگری چون جبر، نجوم، استاتیک و نورشناسی مربوط اند

نمونه‌ی بارز این دسته از کتاب‌ها «مجسطی[۲۰]» بطلمیوس است که الهام‌بخش بسیاری از کارهای نجومی در جهان اسلام است. این کتاب را نخستین بار یحیی بن خالد برمکی به عربی برگرداند. از مهم‌ترین ترجمه‌های آن می‌توان به ترجمه‌های حجاج بن مطر، نیریزی و اصلاحی که ثابت بن قره بر آن صورت داده، اشاره کرد (ابن ندیم، ص ۳۲۷).

۳- کتاب‌هایی که می‌توان آن‌ها را هندسه‌ی عملی نامید

موضوع کتاب‌هایی که در این گروه قرار می‌گیرند بیشتر شامل روش‌هایی است که در مساحی زمین، انتقال آب، ساختمان‌ها و صنعت از آن‌ها استفاده می‌شده است.

ب) عصر خلاقیت

سهم بزرگ دانشمندان عرب‌زبان در تکوین علم هندسه بعد از ترجمه‌ی آثار عمده‌ی هندسی یونان مشخص می‌شود؛ زیرا از این پس آنان فقط تکرار کننده‌ی گفته‌های پیشینیان نبودند. استفاده از روش‌های اثبات جدید برای قضایای هندسی، تلفیق هندسه با سایر شاخه‌های علم نظیر اخترشناسی، نورشناسی و جبر، تدوین قوانین مثلثات و استفاده‌ی بهینه از دانش هندسه در ساخت ابنیه و سازه‌های گوناگون، نشان دهنده‌ی این سهم بزرگ است. این تغییر نگرش را حتی از میان گفته‌های خود ایشان نیز می‌توان دریافت. ابراهیم بن سنان، یکی از علمای مسلمان هندسه در سده‌ی چهارم، در باره‌ی استفاده‌ی بیشتر از روش‌های تحلیلی به جای روش ترکیب[۲۱] در بین علمای مسلمان، چنین اظهار نظر می‌کند:

«من دیده‌ام که علمای هندسه‌ی این عصر در مورد روش‌های تحلیلی و ترکیبی آپولونیوس اهمال می‌کنند و تنها به تحلیلی بسنده کرده‌اند و آن‌ها در پی آن هستند که مردم را بدان سمت سوق دهند که تحلیل هیچ رابطه‌ای با ترکیب ندارد» (راشد[۲۲]، ابراهیم بن سنان[۲۳]، ص ۳).

در این قسمت سعی ما بر آن است که ضمن بررسی ویژگی‌های هندسه‌ی این عصر به معرفی چهره‌های برجسته‌ی آن و آثار ایشان بپردازیم. البته نمی‌توان برای آغاز این دوران زمان مشخصی را تعیین کرد؛ زیرا برخی از چهره‌های شناخته شده‌ی هندسه در عالم اسلام آثار ارزشمند و بدیعی به یادگار گذاشته‌اند، از آن جمله می‌توان به بنوموسی و ثابت بن قره اشاره کرد که در همان عصری می‌زیسته‌اند که ما آن را عصر ترجمه می‌نامیم.

هندسه و جبر

محمد بن موسی خوارزمی که او را مبدع مباحث جبر می‌دانند در بخشی از کتاب «جبر و مقابله» به توجیه هندسی دستورهای حل معادلات صنف چهارم تا ششم[۲۴] می‌پردازد. این توجیهات را نمی‌توان اثباتی برای این صورت‌ها دانست، اما کوششی است برای آن که الگوریتم از راه رسم یک شکل هندسی تأیید شود (دانش‌نامه‌ی جهان اسلام، ذیل«جبر و مقابله»).

خوارزمی در باره‌ی شکلی که در حل معادله‌ی صنف چهارم در نظر گرفته، می‌گوید: «صورت آن، سطح مربع مجهول الاضلاعی است و این شکل همان مالی است که تو می‌خواهی اندازه‌اش را بدانی و مقدار جذرش را بشناسی؛ این شکل عبارت است از سطح آب که هر ضلعی از اضلاعش به منزله‌ی جذر آن است. اگر یکی از اضلاع آن را در عددی از اعداد ضرب کنی، عددی که به دست می‌آید برابر مقدار جذرهاست و هر جذر، مانند یک جذر (= ضلع) آن سطح است» (خوارزمی، ص ۲۲؛ همو، ترجمه‌ی خدیوجم، ص ۴۸).

شکلی که وی برای این کار در نظر می‌گیرد بدین صورت است:

شش و یک چهارم	ح	شش و یک چهارم
ک	۱ مال ب	ج
شش و یک چهارم	ط	شش و یک چهارم

معادله‌ای که خوارزمی در این بخش می‌خواهد حل کند، معادله‌ی $x^2 + 10x = 39$ است و از این شیوه برای نشان دادن دلیل نصف کردن ضریب مجهول استفاده کرده است (خوارزمی، ترجمه‌ی خدیوجم، ص ۴۸؛ نیز دانش‌نامه‌ی جهان اسلام، ذیل «جبر و مقابله»).

خوارزمی در بخش دیگری از کتاب «جبر و مقابله» با عنوان «باب المساحه» از روش‌های جبری برای حل مسائل هندسی سود جسته است. خوارزمی در این بخش به بیان مساحت اشکال مختلف هندسی می‌پردازد. در بیان مساحت دایره، وی ابتدا طریقه‌ی محاسبه‌ی محیط دایره را به صورت حاصل‌ضرب قطر در عدد $3\frac{1}{7}$ بیان می‌کند و این را اصطلاحی می‌داند که در بین مردم بدون چون و چرا پذیرفته شده است (خوارزمی، ص ۵۵-۵۷؛ نیز خوارزمی، ترجمه‌ی خدیوجم، ص ۱۰۶). پس از بیان نظریات موجود در باره‌ی این نسبت، وی مساحت دایره را به صورت حاصل‌ضرب نصف قطر در نصف دور می‌نویسد و در توجیه این امر می‌گوید:

«زیرا اگر در تمام سطح‌هایی که دارای اضلاع و زوایای متساوی انـد، از قبیل مثلث، چهار ضلعـی، پنج ضلعی و بیش از آن، اگر نصف مجموع اضلاع پیرامون آن‌ها، در نصف قطر وسـیع‌ترین دایره‌ای که در آن‌ها واقع می‌شـود– یعنی دایره‌ی محاطی– ضرب شود، مساحت آن‌ها به دست می‌آید».

خـود او در این موضوع فرمولی به صورت زیـر ارائه می‌کند که «d» در آن قطر دایره است و آن را موافق بیان قبل می‌داند (خوارزمی، ترجمه‌ی خدیوجم، همان جا؛ یوشـکویچ و روزنفلد، «هندسـه»، ص ۴۴۹).

$$S = d^2 - \frac{1}{7}d^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{7}d^2$$

در ادامــه‌ی ایـن بخش وی به بیـان فرمول‌هـای تعیین حجم مکعب، اسـتوانه، مخروط و هرم می‌پردازد، اما اظهار نظری در باره‌ی حجم کره نکرده است.

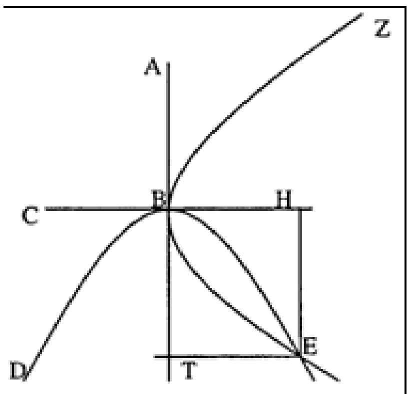
اسـتفاده از روش‌های ساده‌ی هندسـی برای تبیین روش جبری حـل معادلـه‌ی درجـه‌ی دوم در یک قالب هندسـی و هم‌چنین حل عددی آن‌ها را می‌توان پُلی بین هندسـه و جبر تصور کرد که این پُل را دانشمندان عرب‌زبان، برای نخستین بار ساختند.

اوج ایـن پدیـده یا به عبارت دیگر، اوج هندسـی شـدن جبر را می‌تـوان در آثار خیام مشـاهده کرد. خیام در رسـاله‌ای، که با عنوان «رسـالة فی الجبر و المقابله» شناخته می‌شـود، به دسته‌بندی و حل معادلات تا درجه‌ی سـوم پرداخته اسـت. تاریخچه‌ی حل معادلات با درجه‌ی بیشـتر از دو نشـان می‌دهد که ریاضی‌دانان پیش از خیام در جهان اسـلام، برای حل برخی از مسائل هندسی، به این نتیجه دست یافته بودند که این مسـائل به معادلاتی با درجه‌ی بیشتر از دو منتهی می‌شـوند و تنها از طریق قطوع مخروطی حل شـدنی اند. از جمله‌ی این مسـائل، یکی مسأله‌ی ارشمیدس در تقسیم کره‌ای به دو قسمت اسـت به طوری که حجم قسـمت بزرگ‌تر «n» برابر حجم قسمت کوچک‌تر باشـد. علاوه بر این مطلب در مسـائل هندسـی، در برخی از مسـائل عددی نیز به چنین نتایجی می‌رسیدند (دانش‌نامه‌ی جهان اسلام، ذیل «جبر و مقابله»).

خیام در این رساله معادلات شناخته شده در زمان خود تا درجه‌ی سوم را در ۲۵ صنف طبقه‌بندی می‌کند. خیام در روش حل خود برای این معادلات از شـیوه‌ی برهانی استفاده می‌کند. علم برهانی در زمان خیام از روش‌های هندسـی بهره می‌گرفته؛ از این رو، خیام برای حل همه‌ی اصنافی که ذکر کرده از هندسه استفاده کرده است.

در این‌جـا برای نمونه، روش خیام در حل صنف سـوم از اصناف شش‌گانه‌ی مقترنات سه‌تایی درجه‌ی سوم را بیان می‌کنیم.

این معادله عبارت اسـت از آن که مکعبی معادل اضلاع و عددی باشـد $AB \cdot (x^3 = bx + a)$ را ضلع مربعی مساوی عده‌ی اضلاع قرار می‌دهیم و مکعب مربعی می‌سـازیم کـه مربع «AB» قاعده و «BC» ارتفاع آن باشد و حجم آن مساوی عدد مفروض خواهد بود.



سـهمی (قطع مکافـی) «DBE» به رأس «B» را چنان رسـم می‌کنیم که «AB» ضلع قائمش باشـد، هم‌چنین هذلولی (قطع زاید) متساوی القطرین «ZBE» را چنان رسم می‌کنیم که اندازه‌ی اضلاع قائم و مایل آن برابر «BC» باشـند. ایـن هذلولی بر «AB» مماس است.

فـرض می‌کنیم این دو منحنی در نقطه‌ی «E» هم‌دیگر را قطع کنند. از نقطه‌ی «E» عمودهای «ET» و «EH» را رسـم می‌کنیم. در هذلولی داریم که

$$\overline{EH}^2 = CH \times BH \xrightarrow{EH=BT} \frac{CH}{BT} = \frac{BT}{HB}$$

در سهمی نیز داریم

$$\overline{ET}^2 = AB \times BT$$

در این‌جـا هم با در نظر گرفتن این مطلب که «ET» با «HB» برابر است، به نسبت زیر خواهیم رسید:

$$\frac{AB}{BH} = \frac{BH}{BT}$$

با استفاده از این دو نامساوی خواهیم داشت

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{BH}^2} = \frac{BH}{CH} \Rightarrow \overline{BH}^3 = \overline{AB}^2 \times CH \xrightarrow{CH=CB+BH} \overline{BH}^3 = \left(\overline{AB}^2 \times BH\right) + \left(\overline{AB}^2 \times BC\right)$$

یا به عبارت دیگر

$$\overline{BH}^3 = b \times BH + a$$

و در نتیجه «BH» همان مقدار مطلوب است[۲۵].

اختصاص کمیتی هندسی مانند اندازه‌ی یک خط به مقدار مجهول و همگن‌سـازی معادله در محیطی کاملاً هندسی، روش هندسی خیام برای حل این گونه معادلات را به‌خوبی نشـان می‌دهد (مصاحب، ص ۲۸، ۲۹، ۱۹۸–۲۰۰).

محاسبات هندسی

همـان گونـه که از مفهوم واژه‌ی هندسـه برمی‌آید، این رشـته رابطـه‌ی تنگاتنگی با محاسـبات دارد. تلاش بـرای اندازه‌گیری‌های دقیق و بدون خطا و محاسـبه‌ی کمیات وابسته به موجودات هندسی از جملـه مواردی اند که در میان آثـار پیش‌گامان یونانی نیز به‌خوبی

مشهود است.

یکی از این محاسبات که تاریخچه‌ی طولانی دارد، تلاش برای به دست آوردن نسبت محیط به قطر دایره است، همان مقداری که ما امروزه آن را نسبت p می‌نامیم. فارغ از مجموعه‌ی تلاش‌هایی که یونانیان در این موضوع انجام دادند، در این قسمت برای بیان میزان پیشرفت مسلمانان در انجام محاسبات هندسی قصد داریم تاریخچه‌ی مختصری از تلاش‌های ایشان برای محاسبه‌ی این مقدار را عرضه کنیم.

دانشمندان عرب‌زبان در این بخش بسیار سریع دست به نوآوری و تدوین کتاب زدند. در این میان، می‌توان به عنوان نخستین اثر ارزشمند به کتاب «معرفة مساحة الاشکال البسیطة و الکریة» بنوموسی اشاره کرد. بنوموسی عنوانی است که به سه برادر با نام‌های محمد (متوفی ۲۵۹ ق)، حسن و احمد داده شده است. ابن ندیم ایشان را بنوموسی بن شاکر می‌نامد و در توصیف ایشان، آن‌ها را جماعتی طالب علم و مشتاق به آن توصیف می‌کند (ابن ندیم، ص۳۳۱). ابن ندیم این کتاب را با نام «مساحة الاکر و قسمة الزوایا بثلاثه اقسام متساویة و وضع مقدارین لتتوالی علی نسبة» معرفی می‌کند (همان) و این احتمالاً نامی است که خود ابن ندیم یا مأخذ او از روی مطالب موجود در این کتاب بر آن نهاده است (دائرةالمعارف بزرگ اسلامی، ذیل «بنی موسی»). این رساله در تحریر نصیرالدین طوسی با همان عنوانی که در ابتدا گفته شد، شناخته می‌شود.

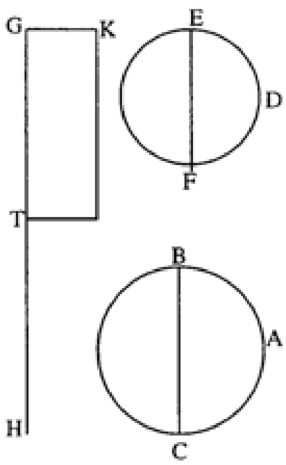
هدف ایشان در این رساله بیان مساحت چندضلعی‌های محیط و محاط در دایره و نتیجه‌گیری مساحت دایره از این طریق و هم‌چنین محاسبه‌ی حجم اجسامی چون کره، استوانه و مخروط است. در قضیه‌ی چهارمِ کتاب، چگونگی اندازه‌گیری مساحت دایره ثابت شده است (طوسی، ص ۵). نکته‌ی بدیعی که در این قضیه دیده می‌شود، بیان مساحت یک شکل به صورت حاصل‌ضرب دو مقدار از آن است، حال آن که در هندسه‌ی یونانی این حالت فقط موقعی مجاز بوده که مقدارهای داده شده به صورت عددی مشخص شده باشند و در حالت برهانی معمولاً مساحت هر شکل بر اساس مساحت شکل دیگر بیان می‌شود. این طرز بیان در این رساله می‌تواند مبین تصور گسترده‌تری از عدد نزد دانشمندان عرب‌زبان آن عصر باشد و این امر را می‌توان تأثیر مستقیم علم جبر دانست (دائرةالمعارف بزرگ اسلامی، ذیل «بنی‌موسی»).

ایشان در قضیه‌ی پنجم کتاب به اثبات این قضیه می‌پردازند که نسبت قطر هر دایره‌ای به محیطش مقداری ثابت است. روش اثبات ایشان در این قضیه به صورت زیر است.

دو دایره‌ی «ABC» و «DEF» را چنان در نظر می‌گیریم که «BC» و «EF» به ترتیب قطرهای آن‌ها باشند. فرض می‌کنیم که نسبت قطر به محیط در این دو دایره با یک‌دیگر برابر نباشد و نسبت «BC» و «ABC» برابر نسبت «EF» به «GH» باشد. حال دو حالت می‌توان در نظر گرفت.

۱) GH<DEF

۲) GH>DEF



حالت اول را در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم که به تناقض خواهیم رسید.

نقطه‌ی «T» را وسط «GH» در نظر می‌گیریم و عمود «GK» را بر «GH» رسم می‌کنیم که این عمود مساوی نصف «EF» است، بدین ترتیب سطح «KT» را کامل می‌کنیم. پس سطح «KT» از مساحت دایره‌ی «DEF» کمتر است.

می‌دانیم که حاصل‌ضرب «GT» در «GK» برابر سطح «KT» است و حاصل‌ضرب نصف سطح «BC» ($BC^۲$) در نصف محیط دایره‌ی «ABC» مساحت دایره‌ی «ABC» است، در نتیجه در مقایسه‌ی دو مساحت داریم:

$$\frac{KT}{ABC}=\frac{GK}{\frac{1}{2}BC}=\frac{\frac{1}{2}EF}{\frac{1}{2}BC}=\frac{EF}{BC}$$

مطابق قضیه‌ای در کتاب «اصول»، نسبت دو قطر در دو دایره برابر است با نسبت محیط دو دایره، در نتیجه سطح «KT» با دایره‌ی «DEF» برابر خواهد شد که تناقض است. به همین ترتیب می‌توان حالت دوم را نیز رد کرد و در نتیجه در هر دایره‌ای چنین است و این همان است که می‌خواستیم (خواجه نصیرالدین طوسی، تحریر معرفة مساحة الاشکال، ص ۵ –۶؛ نیز راشد[۲۶]، ص ۷۲–۷۳).

در ادامه‌ی این مطلب و در قضیه‌ی بعد ایشان در صدد محاسبه‌ی این مقدار برمی‌آیند و این کار را به روش ارشمیدس انجام می‌دهند؛ یعنی محیط و محاط کردن $۲^{\pi} \times ۶$ ضلعی‌های منتظم در دایره که این روش به نامساوی $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ منتهی می‌شود و مقدار تقریبی $\pi = 3.14$ را خواهد داد (خواجه نصیرالدین طوسی، ص ۹؛ نیز دائرةالمعارف بزرگ اسلامی، ذیل «بنی‌موسی»).

در این کتاب علاوه بر این مباحث دو مسأله‌ی مهم دیگر هم مورد بررسی قرار گرفته است: یکی چگونگی ایجاد کمیات متوسط متناسب «x» و «y» بین دو مقدار معلوم «a» و «b» $(\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{b})$ و دیگری مسأله‌ی معروف تثلیث زاویه. هر دوی این مسائل از آن

دست مسائلی اند که به معادلاتی از درجه‌ی سوم منتهی خواهند شد (یوشکویچ و روزنفلد، «هندسه»، ص ۵۷۹).

ریاضی‌دان دیگری که در این زمینه باید از او نام برد، غیاث الدین جمشید کاشانی (متوفی ۸۳۲ ق) است. کاشانی آثار ارزشمند بسیاری در موضوعات ریاضی و نجوم به یادگار گذاشته است. یکی از این آثار رساله‌ای با نام «رساله‌ی محیطیه» است. نام این رساله در منابع به صورت «فی نسبة قطر الی المحیط» ثبت شده است (حاجی خلیفه، ج ۵، ص ۲۱۳؛ نیز افشار و دانش‌پژوه، ج ۹، ص ۱۹۶). این کتاب از جمله مهم‌ترین آثار کاشانی است و به مسأله‌ی محاسبه‌ی محیط دایره (و عدد π) به روش کلاسیک می‌پردازد. تاریخ‌نگاران ریاضیات در اروپا این اثر را شاهکار فن محاسبه خوانده‌اند (باقری، ص ۲۲). از مهم‌ترین ویژگی‌های این اثر استفاده از ابزارهای مقدماتی در محاسبات است که از مرز جذر گرفتن تجاوز نمی‌کند و روش محاسباتی او به حداقل محاسبه نیاز دارد و دقت محاسبات او حدود $۰/۵ \times ۱۰^{-۱۷}$ است (یوشکویچ و روزنفلد، «الکاشی[۲۷]»، ص ۲۵۸).

کاشانی در فصل‌های سوم تا نهم کتاب خود به این مسأله می‌پردازد و در هر مرحله بخشی از کار را انجام می‌دهد. در فصل سوم کتاب، کاشانی در پی محاسبه‌ی محیط دایره است به طوری که آن را به چند ضلع (= جزو متساوی) تقسیم می‌کند و عمل را تا آن مرتبه (شصت‌گانی) ادامه می‌دهد که (طول) محیط قسمی برای ما حاصل شود که در دایره‌ی مذکور (تفاوت) به مویی نرسد و در فصل چهارم به شرح این اعمال می‌پردازد. فصل پنجم، در استخراج (طول) یک ضلع از کثیرالاضلاع (منتظم) محاط در دایره که عده‌ی اضلاع آن ۴۸، ۱۲، ۱۶، ۸، ۲ و ۱ باشد. فصل ششم، مشتمل است بر استخراج محیط کثیرالاضلاع (منتظم) محاط در دایره و (محیط) کثیرالاضلاع مشابه با آن و محیط بر دایره که عده‌ی اضلاع هر یک ۸۰۵۳۰۶۳۶۸ باشد. فصل هفتم، می‌پردازد به آن‌چه از فرو گذاشتن کسرهای زائد یا باقی (ناقص) در آخرین رقم‌های اعمال پیش حاصل می‌شود. فصل هشتم، در تبدیل اندازه‌ی محیط (دایره) است به ارقام هندی به فرض آن که شعاع دایره معلوم باشد (قربانی، ص ۱۳۲-۱۳۳).

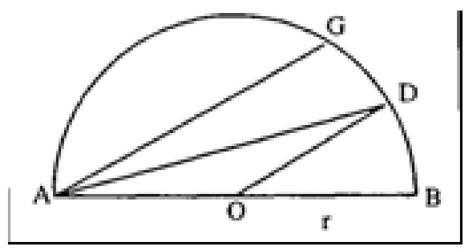
کاشانی در فصل اول قضیه‌ای را ثابت می‌کند که اساس محاسبات وی در این رساله به حساب می‌آید. صورت این قضیه به بیان امروزی چنین است:

قضیه: اگر روی نیم دایره‌ای به قطر AB = ۲r و به مرکز «O»، قوس دل‌خواه «AG» را در نظر بگیریم و وسط قوس «GB» را که مکمل قوس «AG» است، نقطه‌ی «D» بنامیم و «AD» را رسم کنیم، رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$r(2r + AG) = \overline{AD}^2$$

و نتیجه گرفته است که اگر شعاع دایره و طول وتر «AG» معلوم و نقطه‌ی «D» وسط قوس «BG» باشد، می‌توان وتر «AD» را حساب کرد (همان، ص ۱۴۳). حال اگر اندازه‌ی کمان «AG» برابر 2φ باشد و r= ۱ باشد، خواهیم داشت: $AG = 2\sin\varphi$ و $AD = 2\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})$. آن‌گاه رابطه‌ی (۱) به صورت زیر در می‌آید:

$$\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}) = \sqrt{\frac{1+\sin\varphi}{2}}$$



شکل ۱

هدف کاشانی در فصل سوم این است که «n» (تعداد اضلاع کثیرالاضلاع منتظم محیطی و محاطی) را طوری تعیین کند تا اختلاف محیط کثیرالاضلاع و محیط دایره‌ای که قطرش ۶۰۰ هزار برابر قطر کره‌ی زمین است، کمتر از یک مو[۲۸] باشد. به این منظور وی نتیجه می‌گیرد که تعداد اضلاع کثیرالاضلاع منتظم محیطی و محاطی را باید به قدری بزرگ انتخاب کند تا اختلاف دو محیط به یک ثامنه[۲۹] نرسد. کاشانی با محاسبات تقریبی ماهرانه، تعداد اضلاع را $۸۰۵۳۰۶۳۶۸ = ۲^{۲۸} \times ۳$ در نظر گرفته است.

کاشانی در فصل چهارم «محیطیه» طول ضلع $۲^{۲۸} \times ۳$ ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع ۶۰ واحد را حساب می‌کند و برای این که محاسباتش به اندازه‌ی کافی دقیق باشد، هر عمل را تا مرتبه‌ی ثامنه عشر ($=\frac{1}{(60)^{18}}$) ادامه می‌دهد. وی با استفاده از رابطه‌ی $(C_n)^2 = r(2r + C_{n-1}) \Rightarrow C_n = \sqrt{r(2r + C_{n-1})}$ که از آن در فصل دوم سود برده است، $C_{۲۸}$ را در دستگاه شصت‌گانی به دست می‌آورد که اگر r = ۱ باشد آن‌گاه $C_{۲۸}$ در دستگاه ده‌گانی برابر است با: $C_{28} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$ (تعداد رادیکال‌ها ۲۸ عدد است).

کاشانی در فصل پنجم «محیطیه» با استفاده از رابطه‌ی طول ضلع $۲^{۲۸} \times ۳$ ضلعی منتظم محاطی را به دست می‌آورد که برابر مقدار $a_{۲۸} =$ ۰،۰،۰،۰،۶،۴،۱،۱۴،۵۹،۳۶،۱۴،۳۳،۳۶،۱۹،۲۵ است و اگر r = ۱ باشد آن‌گاه $a_{۲۸}$ در دستگاه ده‌گانی برابر است با: $a_{28} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}$ (تعداد رادیکال‌ها ۲۸ عدد است).

کاشانی در فصل ششم «محیطیه» با استفاده از $a_{۲۸}$ محیط $۲^{۲۸} \times ۳$ ضلعی منتظم محاطی و محیطی را به دست می‌آورد و نصف مجموع این دو مقدار را برابر با محیط دایره می‌گیرد که برابر است با: ۶،۱۶،۵۹،۲۸،۱،۳۴،۵۱،۴۶،۱۴،۵۰.

در فصل هشتم با فرض r = ۱ محیط دایره، در واقع مقدار ۲π، را در دستگاه دهگانی محاسبه کرده است: $۲\pi = ۶/۲۸۳۱۸۵۳۰۷۱۷۹۵۸۶۵$ که تمام ارقام آن تا رتبه‌ای که وی محاسبه کرده، درست است (قربانی،

۱۴۳–۱۵۲).

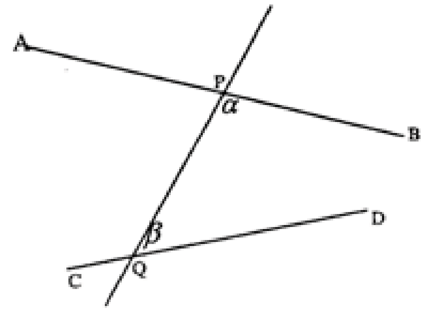
کاشـانی علاوه بر محاسبه‌ی مقدار π، در رساله‌ی دیگری که با عنوان «رسـاله‌ی وتر و جیب» شناخته می‌شـود مقدار جیب (=sin) زاویه‌ی یک درجه را هم با دقتی بالا محاسـبه کرده اسـت. اصل این رسـاله باقی نمانـده و اطلاعات ما از مطلب این کتاب از شـرح‌هایی اسـت که قاضی‌زاده، ملا عبدالعلی بیرجنـدی و میرم چلبی در باره‌ی این کتاب نوشته‌اند (قربانی، ص ۱۵۷–۱۵۸). او این مقدار را در جواب معادله‌ی $x^3 + 900\sin(3) = 2700x$ به دست می‌آورد. وی برای حل این معادله از یک روش تکرار همگن بهره می‌برد (سـوادی، ص ۲۵؛ نیز یوشکویچ و روزنفلد، «هندسه»، ص ۴۵۴).

نگاهـی اجمالی به مسـأله‌ی مقـدار عـدد π و تلاش‌هایی که دانشمندان عرب‌زبان برای دقیق شدن آن انجام دادند و مسائلی دیگر از این دسـت، پیشرفت ایشان در حل محاسـباتیِ این گونه مسائل را به‌خوبی نشان می‌دهد. تلاش برای فهم دقیق روش‌های پیشینیان در نخسـتین گام و سپس استفاده از ابتکارات خاصی که در محیط علمی خودی شـکل گرفته اسـت، نیز نکته‌ی دیگری است که از میان این بررسی برخواهد آمد.

نظریه‌ی خطوط موازی

همان گونه که پیش از این اشـاره شـد، کتاب اقلیدس از اسلوب اصول موضوعی برخوردار اسـت؛ یعنی در ابتدا به بیان یک مجموعه تعاریف و اصول اولیه می‌پردازد و در ادامه با اسـتفاده از آن‌ها گزاره‌ها و قضایا را ثابت می‌کند. اصولی که اقلیدس در کتاب خود بیان می‌دارد به شرح زیرند:

۱. بین هر دو نقطه می‌توان یک خط راست رسم کرد.
۲. می‌توان یک خط مستقیم را از هر سویی امتداد داد.
۳. هر دایره که مرکز و شعاع آن مشخص باشد، داده شده است.
۴. تمام زوایای قائمه با هم برابرند.
۵. اگر خط مسـتقیمی دو خط مسـتقیم دیگر را به صورتی قطع کند که مجمع دو زاویه‌ی داخلی در یک سمت کمتر از دو قائمه باشد، دو خط مسـتقیم یک‌دیگر را در همان سـو قطع می‌کنند (موردش[۳۰]، «اقلیدس[۳۱]»، ص ۴۱۶ و ۴۱۷).



تحقیقـات صورت گرفتـه در نظریه‌ی خطوط مـوازی به همراه تـلاش برای کشـف رابطه‌ای بیـن اصل پنجم اقلیدس و مسـأله‌ی خطـوط موازی اهمیت بسـیاری در تاریخ هندسـه دارد. ابهام موجود در این اصل در مقایسـه با اصول قبلی و اسـتفاده نکردن اقلیدس از این اصل برای اثبات گزاره‌های خود تا گزاره‌ی ۲۹ کتاب «اصول» را می‌توان علت این تلاش‌ها دانست.

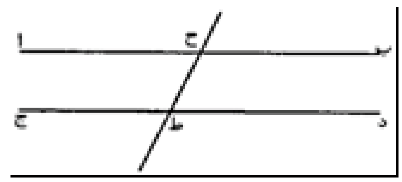
نخستین اقدامات برای تبیین این اصل را یونانیان پس از اقلیدس انجام دادند. در این میان می‌توان از رسـاله‌ای مفقود از ارشمیدس به نام کتـاب «الخطوط المتوازیـة[۳۲]» نام برد که گویا مسـلمانان آن را می‌شـناخته‌اند؛ زیرا ابن ندیم و قفطی هر دو از این کتاب در فهرست آثار ارشمیدس نام برده‌اند (ابن ندیم، ص ۳۲۶؛ قفطی، ص ۶۷). عنوان این رسـاله خود نشـان دهنده‌ی تلاش ارشمیدس در زمینه‌ی خطوط متوازی است. هم‌چنین افرادی چون پوسیدینیوس[۳۳] (نیمه‌ی اول قرن نخست پ م)، بطلمیوس (قرن دوم میلادی) و پروکلس[۳۴] (قرن پنجم میلادی) از کسـانی بودند که تـلاش کردند تا این اصل را به صورت یک قضیه به اثبات برسـانند (یوشـکویچ و روزنفلد، «هندسـه»، ص ۴۶۴). پروکلس در انتقادی که از این اصل می‌کند، آن را با نام قضیه می‌نامـد و از این رو آن را نیازمند به اثبات تلقی می‌کند. وی برای رد اصل بـودن این مطلب از مثال هذلولی و مجانبش اسـتفاده می‌کند؛ از آن‌جا کـه فاصله‌ی بین هذلولی و مجانبش مدام کم می‌شـود، اما یک‌دیگـر را هیـچ گاه قطع نمی‌کننـد. او این مطلـب را علتی برای اقامه‌ی برهان برای اصل پنجم می‌داند؛ از این رو، آن را فاقد شـرایط اصل بودن برمی‌شمرد (حسینی، ص ۹۶–۹۷).

چنـان که در عصر ترجمه و در بیـان ترجمه‌های کتاب اقلیدس دیده شـد، از ابتدا عده‌ای از دانشمندان مسلمان اقدام به تدوین کتبی با عنوان شرح اصول کردند. در این میان می‌توان از نیریزی، جوهری، ثابت بن قره و ابوجعفر خازن نام برد که ابن ندیم از آن‌ها نام برده است (ابن ندیم، ص ۳۲۵–۳۲۶). افزون بر اشـخاص ذکر شده، دانشمندان نـام‌آوری چون ابن هیثم در کتاب «حل شـکوک اقلیدس»، خیام در «شرح ما اشکل من کتاب اقلیدس» و خواجه نصیر طوسی در «رسالة الشـافیة» به بیان براهینی برای توجیه این اصل پرداخته‌اند. در ادامه به روش‌هایی که ایشان برای حل این مسأله در نظر گرفته‌اند اشاره‌ی کوتاهی خواهیم کرد.

نخسـتین کتابـی کـه در این موضوع از دانشـمندان مسـلمان می‌شناسیم کتابی است با عنوان «اصلاح لکتاب الاصول» (ابن ندیم، ص ۳۳۱) که به قلم جوهری نوشـته شـده اسـت. جوهری در کتاب خـود پنج قضیه به کتاب «اصـول» می‌افزاید. وی این قضایا را بعد از قضیـه‌ی ۲۷ «اصول» قرار می‌دهد و در قضیـه‌ی ۳۳ از کتاب خود، اصـل پنجم اقلیدس را به مثابه‌ی یـک قضیه ثابت می‌کند. قضایایی که جوهری از آن‌ها استفاده می‌کند، عبارت اند از:

الـف) اگر خـط «حط» دو خـط «اب» و «جد» را قطع کند، به طوری که زوایای «احط» و «حطد» با هم برابر باشند، دو خط «اب»

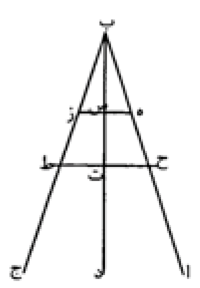
و «جد» با هم موازی اند و نقاط آن‌ها با یک‌دیگر متناظرند.



ب) اگر خطی دو ضلع مثلث را نصف کند، با ضلع سوم متناسب است.

ج) دو ضلع هر زاویه را می‌توان با قاعده‌های بی‌شماری به هم متصل کرد[۱].

د) اگر خط «بد» نیم‌ساز زاویه‌ی «ابج» باشد و دو ضلع زاویه را به هم متصل کنیم، «ست» با «سب» متناسب است.



ه) هر زاویه نیم‌سازی دارد، نقطه‌ای بر این نیم‌ساز وجود دارد که از آن خطی به دو ضلع زاویه متصل خواهد شد که قاعده‌ی آن است (طوسی، رسالة الشافیة، ص ۱۸-۲۴).

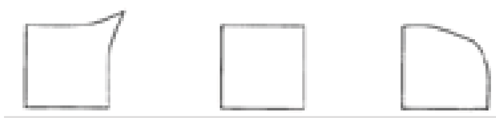
پس از بیان و اثبات این قضایا، جوهری اصل پنجم را به عنوان قضیه‌ی ۳۳ از کتاب خود ثابت می‌کند.

پس از جوهری، ثابت بن قره دو روش اثبات برای اصل پنجم آورده است. یکی از آن‌ها در کتابی با عنوان کتاب «فی أنّه إذا وقع خط مستقیم علی خطین مستقیمین فسیری الزاویتین التین فی جهة واحدة اقل من قائمتین فإن الخطین اذا اُخرجا فی تلک الجهة التقیا» (قفطی، ص ۱۱۶؛ نیز یوشکویچ و روزنفلد، «هندسه»، ص ۴۶۵) و دیگری در «مقالة فی أن الخطین إذا اُخرجا الی الزاویتین اقل من القائمتین التقیا» است (یوشکویچ و روزنفلد، همان جا).

نخستین فرضی که وی برای اثبات این قضیه در نظر می‌گیرد آن است که اگر دو خط در یک جهت از هم دور شوند (به هم نزدیک شوند) و آن‌ها را با خط سومی قطع کنیم در طرف دیگر به هم نزدیک می‌شوند (از هم دور می‌شوند). وی با استفاده از این فرض، وجود یک متوازی الاضلاع را برای اثبات اصل پنجم نشان می‌دهد[۳۵]. در روش دوم وی با فرضِ متفاوتی عمل می‌کند که مبتنی بر حرکت است. او در این اثبات، حرکتی پیوسته را در مسیر یک خط راست فرض می‌کند و چنین تبیین می‌کند که آن‌چه از این حرکت ایجاد می‌شود، خطی موازی خط اول است. در این باره نیز باید گفت که این فرض تنها در هندسه‌ی اقلیدسی صحیح است (یوشکویچ و روزنفلد، همان جا).

ابن هیثم در کتاب «حل شکوک اقلیدس» به جای اصل پنجم از اصل دیگری استفاده می‌کند و آن را روشن‌تر نزد حس و ذهن می‌داند. آن اصل از این قرار است که هر دو خط مستقیمِ متقاطع، ممکن نیست موازی باشند (طوسی، رسالة الشافیة، ص ۵).

وی در کتاب دیگری با عنوان «شرح المصادرات[۳۶]» از روشی استفاده می‌کند که نزدیک به روش ثابت بن قره در اثبات دوم خود است. ابن هیثم نشان می‌دهد پای عمودی که روی یک خط مستقیم حرکت می‌کند، خطی مستقیم را می‌سازد که موازی خط اول است. وی در این‌جا وجود چهارگوشی با یک زاویه‌ی تند یا باز را منتفی می‌داند[۳۷] (شکل الف).



شکل الف

(یوشکویچ و روزنفلد، «هندسه»، ص ٤٦٦).

خیام در کتاب خود، «شرح ما اشکل من کتاب اقلیدس»، نخست از روش ابن هیثم انتقاد می‌کند و از هندسه‌ی حرکتی استفاده نمی‌کند. خیام حرکت را از عوارض جسم طبیعی برمی‌شمرد و آن را شایسته‌ی ورود به عالم کمیات و مقادیر، که عالم هندسه است، نمی‌داند (حسینی، ص ۱۰۰). وی هم‌چنین اقلیدس و پیشینیان خود را برای بهره نگرفتن از اصول فلسفی سرزنش می‌کند و اشتباه آن‌ها را در نظر نگرفتن مبادی مأخوذ از فلسفه می‌داند. منظور وی از این مبادی، آن‌هایی است که ارسطو برمی‌شمرد که عبارت اند از:

۱) کمیات را می‌توان تا بی‌نهایت تقسیم کرد، یعنی آن‌ها از تقسیم ناپذیرها نیستند.

۲) یک خط مستقیم را می‌توان به بی‌نهایت تعریف کرد.

۳) اگر هر دو خطِ مستقیمِ متقاطع را از محل تقاطع ادامه دهیم، از هم دور می‌شوند.

۴) دو خط که به هم نزدیک می‌شوند، هم‌دیگر را قطع می‌کنند و برای دو خطی که از هم دور می‌شوند، در طرفی که فاصله‌ی آن‌ها از هم زیاد می‌شود، نقطه‌ی تلاقی وجود ندارد.

۵) اگر دو کمیت محدود نامساوی داشته باشیم، می‌توان ضریبی یافت که کمیت کوچک‌تر از بزرگ‌تر، بیشتر شود.

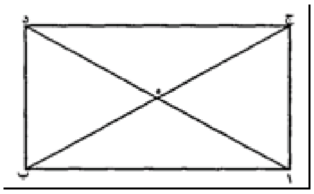
خیام در بیان خویش از اصل چهارم استفاده می‌کند و در نتیجه اشتباه منطقی پیشینیان خود را تکرار نمی‌کند (یوشکویچ و روزنفلد، «هندسه»، ص ۴۶۷).

خیام در روش خود از یک چهارگوش با دو زاویه‌ی قائمه بهره می‌برد و ثابت می‌کند که دو زاویه‌ی دیگر این چهارگوش نیز حتماً قائمه‌اند و برای این کار از هشت قضیه استفاده می‌کند که آن‌ها را بعد

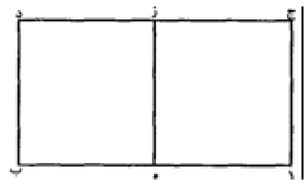
از قضیه‌ی بیست و هشتم کتاب «اصول» قرار می‌دهد.

قضایایی که خیام آن‌ها را ثابت می‌کند عبارت اند از:

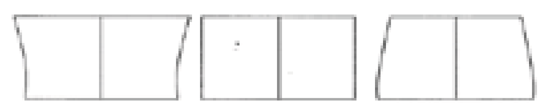
الف) خط «اب» مفروض اســت. اگر دو خــط «اج» و «بد» را بــر «اب» عمود کنیــم و آن‌ها را به یک اندازه امتــداد دهیم (مطابق قضیه‌ی بیســت و هفتم مقالــه‌ی اول اقلیدس این دو خط موازی اند) آن‌گاه زوایای «اجد» و «بجد» با هم برابرند.



ب) شــکل «ابجد» مفروض است. نقطه‌ی ه را وسط «اب» در نظــر می‌گیریم و عمــود «هز» را بر «اب» رســم می‌کنیم. می‌گوییم «جز» مثل «زد» است و «هز» بر «جد» عمود است.



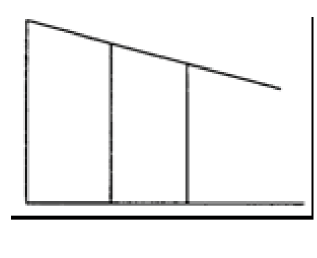
ج) در شــکل بالا دو زاویه‌ی «اجد» و «بجد» قائمه‌اند. در واقع در این قسمت خیام وجود چهارگوش دارای دو قائمه‌ای با دو زاویه‌ی تند یا باز دیگر را منتفی می‌کند (شکل ب).



شکل ب

د) در یــک چهارضلعی با زوایای قائمــه اضلاع روبه‌رو، دو به دو با هم برابرند.

در این‌جا خیام از واژه‌ی متحاذی به جای متوازی استفاده می‌کند. وی خطــوط متحاذی را خطوط عمود بین دو خطی تعریف می‌کند که این دو خط هیچ گاه به هم نمی‌رسند (این واژه پیش از خیام برای بیان چنین مفهومی و به چنین معنایی استفاده نمی‌شده است).



خطوط متحاذی

ه) دو خط متحاذی را فرض می‌کنیم. هر خط که بر یکی از آن‌ها عمود شود بر دیگری هم عمود است.

و) هر دو خط متوازی با تعریف اقلیدس، متحاذی اند.

ز) اگر خط مســتقیمی بر دو خط متوازی فرود آید، زوایای متبادل داخلــی با هم برابرنــد و زاویه‌ی خارجی مثل زاویه‌ی داخلی اســت و مجموع دو زاویه‌ی داخلی دو قائمه است.

و سرانجام در بند «ح» خیام اصل پنجم را به مثابه‌ی یک قضیه ثابت می‌کند (طوســی، رســالة الشــافیة، ص ۸-۱۳؛ نیز حسینی، ص ۱۱۶-۱۲۳).

آخرین کسی که به اثبات اصل پنجم پرداخته، نصیرالدین طوسی است. طوسی رساله‌ای با عنوان «رسالة الشافیة عن الشک فی الخطوط المتوازیة» در این باره نوشته است. وی در این رساله ابتدا به شرح این اصل بر اساس گفته‌ی اقلیدس می‌پردازد و ســپس روش‌های گفته شده‌ی جوهری، ابن هیثم و خیام را بیان می‌کند و کمبود یا مشکلات ایشان را برمی‌شمرد. پس از این قسمت، وی روش خود را برای اثبات این اصل شرح می‌دهد.

روشی که وی در پیش می‌گیرد، بسیار مشابه روش خیام است با این تفاوت که وی اصول فلســفی را که خیام در ابتدا در نظر می‌گیرد، منظور نمی‌کند (یوشکویچ و روزنفلد، «هندسه»، ص ۴۶۹).

طوســی برای اثبات این قضیه از هفت قضیه استفاده می‌کند که هفتمین آن‌ها اصل مذکور است. این قضایا عبارت اند از:

الــف) کوتاه‌ترین فاصله بین یــک نقطه و یک خط، خط عمودی است که از آن نقطه بر آن خط رسم می‌شود.

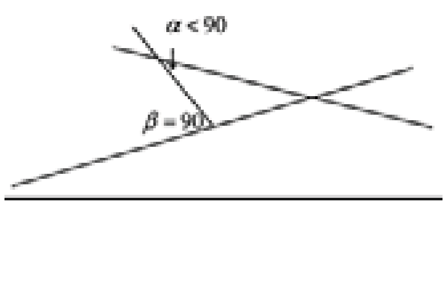
ب) اگر دو خط مساویِ عمود بر یک خط را با خط دیگری به هم وصل کنیم، زوایای ایجاد شده با هم برابرند (قضیه‌ی اول خیام).

ج) دو زاویه‌ی ایجاد شــده در حالت قبل حتماً قائمه‌اند (قضیه‌ی سوم خیام).

د) هــر دو ضلع متقابل از ســطح چهارضلعــی قائم‌الزاویه با هم برابرند (قضیه‌ی چهارم خیام).

ه(اگر خط مســتقیمی بر دو عمود قائم بر خط دیگر رســم شود، دو زاویه‌ی متبادل داخلی با هم برابرند و زاویه‌ی خارجی مثل زاویه‌ی داخلی اســت و مجمــوع دو زاویه‌ی داخلی دو قائمه اســت (قضیه‌ی هفتم خیام).

و) دو خط نامحدود (غیر محدودی الطرفین) هم‌دیگر را قطع کنند و زاویه‌ای غیر قائم می‌ســازند، اگر خطی بر یکی از آن‌ها عمود کنیم، زاویه‌ی داخلی که با خط دیگر می‌سازد، تند است.



ز) اصل پنجم اقلیدس (نصیرالدین طوسـی، رسـالة الشافیة، ص ۲۶-۳۴).

وی برای بیان دو قضیه‌ی آخر خود از بیان دیگری هم اسـتفاده کرده که برگرفته از روش جوهری اسـت (طوسی، رسالة الشافیة، ص ۳۴-۳۶).

تلاش‌هـای دیگری هم پس از طوسـی برای اثبـات این اصل به همت شـاگردان او صورت گرفت، اما اشـتباه مشترک همه‌ی این تلاش‌هـا، کـه در قرن نوزدهم میلادی برطرف شـد، آن اسـت که اصل پنجم، اصلی اسـت برای هندسـه‌ی اقلیدسـی و با تغییر آن در یـک چهارچوب جدید، می‌توان محیط هندسـی جدیدی را خلق کرد؛ آن‌چنان که هندسـه‌های هذلولی و بیضـوی در میانه‌ی قرن نوزدهم پای به عرصه‌ی وجود نهادند.

عـلاوه بر مسـائلی که گفته شـد، می‌توان به مسـائلی دیگر از جمله تبدیلات هندسـی و هندسـه‌ی کروی اشـاره کرد که در میان دانشـمندان دوره‌ی اسلامی، پیشرفت‌های چشـم‌گیری کردند. شاید بتوان ادعا کرد که نخستین نمونه از تدوین تبدیلات هندسی در کتاب «فی المعلومات» ابن هیثم آمده اسـت. وی در آن‌جا اشاره می‌کند که مسـائل مطرح شـده در این کتاب پیـش از وی در جایی مورد بحث قـرار نگرفته‌اند. آن‌چه می‌توان از محتوای این کتاب دریافت، بسـیار شـبیه به مباحث تبدیلات هندسی است. پیشرفت هندسه‌ی کروی در میان ایشان نیز منجر به ظهور مثلثات کروی و بیان نسبت‌های جدید مثلثاتی و بهره‌گیری از آن‌ها در حل مسـائل شد. اوج این پیشرفت‌ها در سال‌های پایانی سـده‌ی چهارم قمری است که ابوالوفای بوزجانی با اسـتفاده از توابع ظلی (تانژانت و کتانژانت) موفق به حل مسـأله‌ی شکل قطاع از طریقی ساده‌تر شد.

کتاب‌شناسی

۱- ابن خلدون، «مقدمه»، ج ۲، ترجمه‌ی محمد پروین گنابادی، تهران، انتشارات علمی و فرهنگی، ۱۳۷۵ ش.

۲- ابن‌سینا، «تسع رسـائل فی الحکمة و الطبیعیات»، تحقیق و تقدیم از حسن عاصی، بیروت، دار قابس ۱۴۰۶ ق/ ۱۹۸۶ م.

۳- ابن ندیم، «الفهرست»، تحقیق از رضا تجدد، تهران، اساطیر، ۱۳۸۱ ش.

۴- اسـترویک، درک. ج، «تاریخ فشرده‌ی ریاضیات»، ترجمه‌ی غلامرضا برادران خسروشاهی، تهران، نشر نو، ۱۳۶۶ ش.

۵- افشـار، ایرج و محمد تقی دانش‌پژوه، «فهرسـت نسخه‌های خطی کتاب‌خانه‌ی ملی ملک»، ج ۹، چاپ کیهانک، ۱۳۶۶ ش.

۶- باقری، محمد، «از سـمرقند به کاشـان»، تهران، انتشـارات علمی و فرهنگی، ۱۳۷۵ ش.

۷- بیرونی، ابوریحان، «التفهیم»، به اهتمام جلال الدین همایی، تهران، مروی، ۱۳۵۲ ش.

۸- تهانوی، محمد علی، «کشـاف اصطلاحات العلوم و الفنون»، تقدیم از رفیق العجم، تهران، فاطمی، ۱۳۷۸ ش.

۹- حاجی خلیفه، «کشـف الظنون عن اسامی کتب و الفنون»، ج ۵، بیروت، دارالفکر، ۱۹۹۹ م.

۱۰- حسـینی، حجـت الحق، «دو رسـاله‌ی خیامـی»، تهران، مؤسسه‌ی فرهنگی اهل قلم، ۱۳۸۲ ش.

۱۱- خوارزمـی، محمد بن احمـد، «مفاتیح العلـوم»، تحقیق از نهی‌النجار، بیروت، دارالفکر، ۱۹۳۳ م.

۱۲- خوارزمی، محمد بن موسی، «جبر و مقابله»، تقدیم و تعلیق از دکتر علی مصطفی مشـرفه و محمد موسـی احمد مصر، دارالکتب العربی، ۱۹۶۸ م.

۱۳- همو، «مفاتیح العلوم»، ترجمه‌ی حسـین خدیوجم، تهران، کمیسـیون ملی، تربیتـی، علمی و فرهنگی ملل متحد (یونسـکو) در ایران، ۱۳۶۲ ش.

۱۴- رازی، فخرالدیـن، «جامع العلـوم»، بمبئی، مطبع مظفری، ۱۳۲۳ ق.

۱۵- رنان، کالین، «تاریخ علم»، ترجمه‌ی حسـن افشار، تهران، مرکز، ۱۳۸۲ ش.

۱۶- سوادی، فاطمه، بررسی روش کاشانی در محاسبه‌ی جیب یک درجه بر اساس «رسالة فی استخراج جیب درجة واحدة»، پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد تاریخ فرهنگ و تمدن اسلامی، دانشکده‌ی الهیات و معارف اسلامی، دانشگاه تهران، ۱۳۸۴ ش.

۱۷- طوسی، نصیرالدین، «الرسائل التسع»، ج ۲، حیدرآباد دکن، مطبع دائرةالمعارف عثمانی، ۱۳۵۹ ق.

۱۸- فارابی، «احصاءالعلوم»، ترجمه‌ی حسـین خدیوجم، تهران، بنیاد فرهنگ ایران، ۱۳۴۸ ش.

۱۹- قربانـی، ابوالقاسـم، «کاشـانی‌نامه»، تهـران، مرکز نشـر دانشگاهی، ۱۳۶۸ ش.

۲۰- قطب الدین شـیرازی، «درةالتاج»، به اهتمام سـید محمد مشکوه، تهران، حکمت، ۱۳۶۵ ش.

۲۱- قفطـی، علی بن یوسـف، «تاریخ الحکمـا» (و هو مختصر الزوزنی المسـمی بالمنتخبات الملتقطات من کتاب اخبارالعلماء باخبار الحکماء)، لایپزیگ، ۱۹۰۳ م.

۲۲- کپری‌زاده، طاش، «مفتاح السعادة و مصباح السیادة»، ج ۱، بیروت، دارالکتب العلمیه، ۱۴۰۵ ق/ ۱۹۸۵ م.

۲۳- مصاحب، غلامحسـین، «حکیم عمر خیـام به عنوان عالم جبر»، تهران، انجمن آثار و مفاخر فرهنگی، ۱۳۷۹ ش.

۲۴- «دائرةالمعارف بزرگ اسـلامی»، ج ۱۲، ذیل «بنی‌موسی»، تهران، مرکز دائرةالمعارف بزرگ اسلامی، ۱۳۸۲ ش.

۲۵- «دانش‌نامـه‌ی جهان اسـلام»، ج ۹، ذیل «جبر و مقابله»، تهران، بنیاد دائرةالمعارف اسلامی، ۱۳۸۴ ش، ص ۵۷۶- ۵۹۵.

۲۶- هیث، سـرتامس لیتل، «تاریخ ریاضیات یونان»، ترجمه‌ی احمد آرام، تهران، انتشارات علمی و فرهنگی، ۱۳۸۱ ش.

27-Al-Daffa, Ali Abdullah, the Muslim Contribution to Mathematics, USA, Atlantic Highlands N.J., 1977.

28- Ball, Walter Wiliam Rose, A Short Account Of History Of Mathematics, Dover Pub, 1908.

29- Murdoch, John, "Euclid", in Dictionary of Scientific Biography, vol IV, New York, Charles Scribner's Sons, pp 414-459.

30-Rashed, Roshdi, Les Mathématiques Infinitésimales du IXe au XI e Sièxle, London, Al-Furqān Islamic Heritage Foundation, 1416/1996.

31- Idem, "Ibrahim-ibn-Sanan" in Dictionary of Scientific Biography, vol VII, New York, Charles Scribner's Sons, pp 2-3.

32- Souissi, M, "'Ilm Al-Handasa" in Encyclopedia of Islam (Supplement), Leiden, EJ.Brill, 1982, pp 411-414.

33- Youschkevitch and Rosenfeld, "Al-Kāshī" in Dictionary of Scientific Biography, vol VII, New York, Charles Scribner's Sons, pp 255-262.

34- Youschkevitch and Rosenfeld, "Geometry" in Encyclopedia of the History of Arabic Science, vol II, Edited by Roshdi Rashed, London & New York, Routledge, 1996.

---

1. Herodotus
2. Papyrus Rhind
3. Al-Daffa
4. Tales
5. Ball
6. Elements
7. Souissi
8. Youschkevitch and Rosenfeld

۹. این ترجمه در زمان هارون الرشید انجام شده است

10. Hypsicles
11. Data
12. The Conic Sections
13. Apollonius
14. Elements of Geometry
15. Menelaus
16. On the Sphere and the Cylinder
17. On the Squaring of the Circle
18. The Lemmata
19. Measuring the Side of a Regular Heptagon Inscribed in a Circle
20. Almagest

۲۱. ترکیب (Synthesis) روشی است که در آن برای حل مسأله از تبیین اصول آغاز می‌کنیم و با کنار هم قرار دادن اصول موضوعه، مرحله به مرحله به نتیجه‌ی مطلوب نزدیک می‌شـویم حال آن که در تحلیل (Analysis) عکس این موضوع مدنظر است، یعنی با حدس جواب در پی به دست آوردن اصولی هســتیم که ما را به این جواب راهنمایی می‌کنند. احتمالاً یونانیان در مســائل هندسی خود از هر دو روش سود می‌جسته‌اند، اما آثاری که از ایشان در دست است بیشتر مبین استفاده از روش‌های ترکیبی است. حال آن که در میان مسلمانان از روش‌های تحلیلی نیز بسیار استفاده شد.

22. Rashed
23. Ibrahhm ibn sanan

۲۴. ایــن اصنــاف شــامل حــل معــادلات $x^2+ax=b$، $x^2+ax=b$ و $x^2+ax=b$ می‌شود.

۲۵. در واقــع خیــام در حل این معادله از قطــع دو منحنی $x^2=\sqrt{b}y$ و $y^2=x\left(x+\frac{a}{b}\right)$ استفاده کرده است.

26. Rashed
27. Al-Kāshī

۲۸. هر مو برابر است با $\frac{1}{6}$ ضخامت جو، هر جو برابر است با $\frac{1}{6}$ انگشت، هر انگشت برابر است با $\frac{1}{24}$ ذراع و هر ذراع برابر است با $\frac{1}{12000}$ فرسنگ.

۲۹. یک ثامنه در دستگاه شمارش شصت‌گانی برابر است با $\frac{1}{(60)^8}$

30. Murdoch
31. Euclid
32. On Parallel Lines
33. Posidonius
34. Proclus

۳۵. امــروز می‌دانیم که این فرض با در نظر گرفتن قواعد اصول هندســه‌ی هذلولی لباچوفسکی نادرست است.

۳۶. طوســی در رســالة الشــافیة، بیان می‌کند که این کتاب را ندیده اســت (نصیرالدین طوسی، رسالة الشافیة، ص۵).

۳۷. این فرض هم با در نظر گرفتن هندســه‌های هذلولوی و بیضوی درست نیست. در این هندسه‌ها وجود چنین چهارگوش‌هایی امکان‌پذیر است.